

Потенциалы сферического сегмента и электростатического заряда в присутствии конуса и секционированной сферы

Резуненко В.А.

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина,
пл. Свободы, 4, 61022, Харьков, Украина
rezunenko@univer.kharkov.ua*

В первой задаче электростатики коэффициенты рядов Фурье искомым потенциалов найдены явно. Во второй задаче для поиска коэффициентов рядов выделена и обращена сингулярная часть матричного оператора. Применено контурное интегрирование и интегральное преобразование Абеля. В результате получено интегральное уравнение Фредгольма II рода.

Ключевые слова: электростатика, заряд, сферы, конус, интегральные уравнения.

Резуненко В.О., **Потенціали сферичного сегменту і електростатичного заряду у присутності конуса і секціонованної сфери.** В першій задачі електростатики знайдено явно коефіцієнти рядів Фур'є невідомих потенціалів. У другій задачі для знаходження коефіцієнтів рядів вилучена і обернена сингулярна частина матричного оператора. Використано контурне інтегрування і інтегральне перетворення Абеля. В результаті одержано інтегральне рівняння Фредгольма II роду.

Ключові слова: електростатика, заряд, сфери, конус, інтегральні рівняння.

V.A. Rezenenko, **Potentials of a spherical segment and electrostatic charge in the presence a cone and sectional sphere.** The Fourier coefficients of series for potentials of first electrostatic problem are found explicitly. The singular part of the matrix operator of second electrostatic problem was separated and inverted for seek of the Fourier coefficients of series. The contour integration and Abel integral transformation were used. As a result the Fredholm integral equation of the second kind was obtained.

Keywords: electrostatics, charge, spheres, cone, integral equations.

2000 Mathematics Subject Classification: 65N12; 35A25; 78A45.

1. Введение

Задачи электростатики на сложных поверхностях, состоящих из частей сферических поверхностей в присутствии бесконечного конуса являются мало изученными. Вместе с тем, задачи электростатики являются модельными для многих математических и физических исследований. Так, для прикладных задач проектирования приборов микро и оптоэлектроники, электромеханических устройств именно электростатика исследует, например, такие важные характеристики как напряжение поля, величины зарядов, ток, ёмкость, пондеромоторные силы. Следует отметить, что многие прикладные и теоретические задачи становятся, например, в предельных случаях длинных волн, квазистатическими [1]. Как тестовые задачи электростатики также важны для теоретического моделирования, для решения прямых и обратных задач на сложных поверхностях [2]–[10], в частности, задач электродинамики, дифракции акустических и электромагнитных волн, задач радиотехники, а также для апробации на современных компьютерах новых численных методов. Ведь и до сих пор для решения большинства задач электростатики применяются приближенные численные методы. В данной работе применяется метод численно–аналитической регуляризации [4]–[10], который позволяет строить сравнительно быстрые и точные численные алгоритмы.

В работе рассматриваются две независимые задачи. В обеих задачах однополостной конус и сферические поверхности предполагаются идеально проводящими и бесконечно тонкими (см. Рис. 1). Методом разделения переменных в сферической системе координат электростатические потенциалы отыскиваются в виде степенных рядов Фурье – Лежандра с дробными индексами. В первой задаче рассматривается расчёт потенциала точечного заряда, размещённого на оси OZ внутри ограниченного закругления бесконечного конуса. Закругление выполнено в виде секционированной полый сферы, опирающейся на конус. Секции – это ленты, разделённые непроводящими бесконечно тонкими нитевидными перегородками, лежащими в горизонтальных плоскостях, которые рассекают сферу закругления. Секции и конус также разделены перегородкой. Для первой задачи коэффициенты рядов Фурье – Лежандра найдены явно. Во второй задаче ищутся потенциалы в неограниченной области, являющейся дополнением к области анализа первой задачи и ограниченной секционированной сферой и конусом. В этой области размещаются сферический сегмент и заряд. Заряд размещается между сферическим сегментом и секционированной сферой на оси OZ . Отыскание коэффициентов рядов Фурье – Лежандра выполняется методом регуляризации матричного оператора в несколько шагов. При этом используется метод, основанный на применении контурного интегрирования, леммы Жордана и решения вспомогательных интегральных уравнений Вольтерра. В результате поиск коэффициентов рядов сведён к решению неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(0, \gamma)$, где γ – угол раскрытия конуса.

2. Постановка первой задачи электростатики

Рассмотрим сравнительно подробно постановку и решение первой задачи. Разместим вершину бесконечного конуса и центр секционированной сферы в общее начало декартовой и сферической систем координат (см. Рис. 1). Пусть a_0 – радиус секционированной сферы – сферического закругления конуса. Пусть закругление конуса состоит из N секций. Полагаем, что ось OZ является осью симметрии вращения для конуса и его закругления. Полярный угол раскрытия конуса, отсчитываемый от положительного направления оси OZ , полагаем равным γ , $0 < \gamma < \pi$. Пусть полярные углы θ_i , $i = 1, 2, \dots, N$ перегородок секций закругления заданы и монотонно возрастают $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_i < \dots < \theta_N = \pi$. Полагаем, что каждая i -тая секция имеет свой независимый потенциал $V_{2,i}^{(0)}$. Потенциал всего сферического закругления для краткости записи обозначаем $V_2^{(0)}$, так что на i -той секции потенциал $V_2^{(0)}$ равен $V_{2,i}^{(0)}$. Полагаем, что конус имеет нулевой потенциал $V = 0$. Источником электростатического поля, кроме секций закругления, является точечный заряд величины q_1 , размещенный на оси OZ в точке b_0 , $0 < b_0 < a_0$. Потенциал V_1 заряда полагаем отличным от нуля.

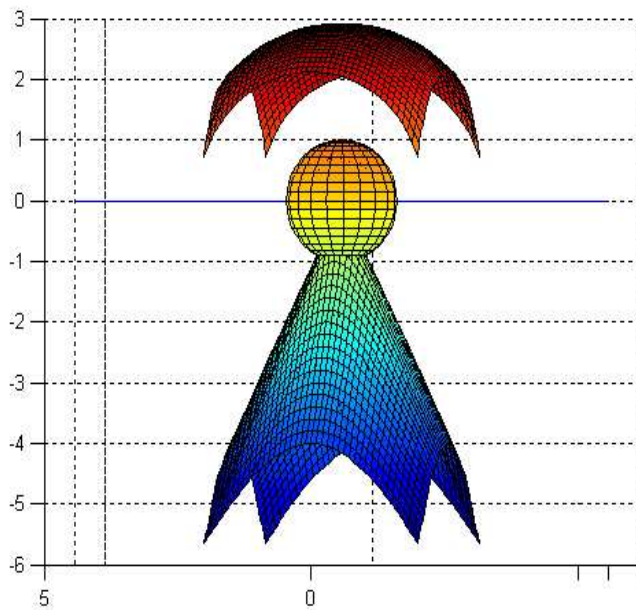


Рис. 1: Сферический сегмент и заряд в присутствии конуса и секционированной сферы.

Электростатическое поле \vec{E} и вектор электрической индукции \vec{D} всюду вне конуса, вне сферических поверхностей и вне точки размещения заряда должны удовлетворять уравнениям Максвелла и материальным уравнениям

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \vec{D} = \varepsilon_1 \vec{E}, \quad (1)$$

где ρ – плотность зарядов на поверхности проводников, ε_1 – диэлектрическая проницаемость среды, $\varepsilon_1 \neq 0$. При этом учитываем, что магнитное поле \vec{H} и магнитная индукция \vec{B} равны нулю. Поверхности конуса и сферического закругления полагаем идеально проводящими, их проводимость $\sigma = \infty$. Заданный точечный заряд и потенциалы сферического закругления в области между конусом и закруглением создают электростатическое поле \vec{E} , которое согласно уравнениям Максвелла (1) и условиям нормировки, с точностью до константы, представимо скалярным вторичным потенциалом U . При этом \vec{E} равно градиенту потенциала U . Полные потенциалы должны удовлетворять граничным условиям на поверхности конуса и его закругления, должны иметь соответствующую особенность в точке размещения заряда, удовлетворять условию конечности интеграла электростатической энергии $\int_W |\operatorname{grad}(U)|^2 dw$ в любой ограниченной области W пространства R^3 , не содержащей зарядов. В такой постановке задача электростатики имеет единственное решение [11].

3. Степенные ряды Фурье – Лежандра для потенциалов

В сферической системе координат рассматриваем область Q_0 , ограниченную конусом и его сферическим секционированным закруглением вершины

$$Q_0 = \{0 \leq r \leq a_0, 0 \leq \theta \leq \gamma, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}. \quad (2)$$

В этой области будем искать вторичный потенциал U_1 . Полный потенциал U , равный суперпозиции вторичного потенциала U_1 и потенциала V_1 заряда, по условию задачи, должен являться решением уравнений (1) и, следовательно, уравнения Лапласа $\Delta U = 0$, и удовлетворять граничным условиям – в частности обращаться в ноль на поверхности S конуса: $U = U_1 + V_1 = 0$, $S = \{(r, \theta, \phi) : (0 \leq r \leq a_0, \theta = \gamma, 0 \leq \phi \leq 2\pi)\}$. Потенциал V_1 точечного заряда q_1 в свободном пространстве представим так: $V_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_1} \frac{1}{R}$, где R – расстояние от заряда до произвольной точки $M(r, \theta, \phi)$ пространства. Имея целью представить потенциалы рядами Фурье, получаем самосопряжённую задачу Штурма–Лиувилля [12], решив которую приходим к степенным рядам Фурье–Лежандра для потенциалов V_1 и U_1 , для которых $0 \leq \theta \leq \gamma, 0 \leq \phi \leq 2\pi$:

$$V_1 = V_1^{(0)} = \frac{q_1}{r\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_0}{r}\right)^{\nu_n+1} T_n P_{\nu_n}(\cos \theta), \quad b_0 < r, \quad (3)$$

$$V_1 = V_1^{(1)} = \frac{q_1}{b_0\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{b_0}\right)^{\nu_n} T_n P_{\nu_n}(\cos \theta), \quad r < b_0, \quad (4)$$

$$U_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos \theta), \quad 0 < r < a_0. \quad (5)$$

Здесь $P_{\nu_n}(\cos \theta)$ – функции Лежандра первого рода степени ν_n нулевого порядка аргумента $\cos \theta$. Величины ν_n являются корнями трансцендентного уравнения $P_{\nu_n}(\cos \gamma) = 0$. Отметим, что это уравнение имеет счётное число вещественных корней $\nu_n, n = 1, 2, 3, \dots$ при условии, что угол γ принадлежит интервалу $(0, \pi)$. Так, при γ , равном 90 градусам, корни уравнения есть нечётные положительные числа: $\nu_n = 2n - 1, n = 1, 2, 3, \dots$. В частности, если $\gamma = 0$, то уравнение корней ν_n не имеет. Действительно, при $\gamma = 0$ находим, используя представления функций Лежандра первого рода интегралом Лапласа, что все функции Лежандра равны единице $P_{\nu_n}(\cos 0) = 1$. В рядах (3), (4) коэффициенты T_n есть известные величины и зависят от величины угла γ . Так, при $\gamma = \frac{\pi}{2}$, как отмечено выше, все $T_{2n} = 0$ и поэтому суммирование в рядах для V_1, U_1 (3), (4) и (5) достаточно выполнять только по нечетным $n = 1, 3, 5, \dots$. Теперь найдём искомые коэффициенты A_n вторичного потенциала U_1 (5). Для этого применим граничные условия на сферическом закруглении конуса для полных потенциалов:

$$V_1 + U_1 = V_2^{(0)}, \quad r = a_0, \quad 0 < b_0 < a_0, \quad 0 \leq \theta < \gamma. \quad (6)$$

Эти граничные условия сформулированы на рассматриваемом в задаче полуинтервале $[0, \gamma)$, для которого выбирались такие функции Лежандра $P_{\nu_n}(\cos \theta)$, чтобы они были ортогональны на $[0, \gamma)$ с весом $\sin \theta$. Используя это свойство ортогональности, из условий (6) получаем искомые коэффициенты A_n в явном виде:

$$A_n = a_0^{-\nu_n} \left[\frac{q_1}{a_0} \left(\frac{b_0}{a_0} \right)^{\nu_n+1} T_n + J_n^{(0)} \frac{2\nu_n + 1}{2} \right], \quad (7)$$

$$J_n^{(0)} = \int_0^\gamma V_2 P_{\nu_n}(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad V_2 = V_2^{(0)} \varepsilon_1. \quad (8)$$

Полученный интеграл $J_n^{(0)}$ (8) удобно вычислять используя связь функций Лежандра с производными $(2\nu + 1)P_\nu(x) = P'_{\nu+1}(x) - P'_{\nu-1}(x)$, тогда

$$J_n^{(0)}(2\nu_n + 1) = \sum_{i=1}^N V_{2,i}^{(0)} \varepsilon_1 [P_{\nu_n+1}(x) - P_{\nu_n-1}(x)] \Big|_{x=\cos \theta_i}^{x=\cos \theta_{i-1}} = J_n^{(1)}. \quad (9)$$

Отметим, что в области Q_0 (2) полный потенциал $U_1 + V_1$ следует находить, зная коэффициенты A_n (7) вторичного потенциала U_1 (5), и используя для потенциала заряда V_1 оба представления – (3) и (4). Этим получен эффективный алгоритм для расчёта электростатических потенциалов и других характеристик полей в ограниченной области Q_0 , охватывающей вершину конуса и расположенной между вершиной конуса и его секционированным закруглением. Теперь рассмотрим вторую задачу. Для

поиска коэффициентов соответствующих степенных рядов Фурье–Лежандра построим интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

4. Постановка второй задачи электростатики и функциональные уравнения

Рассмотрим усложнённый вариант первой задачи. Область Q_0 (2) заменяем её дополнением Q_1 в пространстве R^3 , т.е. $Q_1 = R^3/Q_0$. В область Q_1 помещаем круговой сферический сегмент, геометрический центр которого размещаем в начало систем координат. Радиус сферического сегмента полагаем равным a_1 . Сферическое закругление конуса и сегмент расположены на концентрических поверхностях, различные радиусы которых соответственно таковы, что $a_0 < a_1$. Полярный угол, измеряющий сегмент, полагаем равным θ_0 , $0 \leq \theta_0 < \gamma$; на сегменте $\theta \in [0, \theta_0)$. Сферический сегмент по условию имеет потенциал V_0 . Точечный заряд q_1 теперь помещаем между сферическим сегментом и секционированным закруглением конуса на оси OZ в точку b_0 , $a_0 < b_0 < a_1$. Отметим, что в связи с тем, что область Q_1 является неограниченной, в постановку задачи включим требование к электростатическому полю \vec{E} об убывании на бесконечности: $\vec{E} = O(r^{-1})$, $r \rightarrow \infty$. Теперь, учтя что в области Q_1 по условию $r > a_0$, $\theta \in [0, \gamma]$, $\phi \in [0, 2\pi]$, представим искомые вторичные потенциалы рядами Фурье вида (5):

$$U_2 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{1}{r}\right)^{\nu_n+1} P_{\nu_n}(\cos \theta), \quad a_0 < r < a_1, \quad (10)$$

$$U_3 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos \theta), \quad a_0 < r < a_1. \quad (11)$$

$$U_4 = \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(\frac{1}{r}\right)^{\nu_n+1} P_{\nu_n}(\cos \theta), \quad a_1 < r. \quad (12)$$

Коэффициенты $B_n, C_n, D_n, n = 1, 2, 3, \dots$ рядов (10)–(12) будем искать в гильбертовых пространствах числовых последовательностей l^2 с некоторыми весами, обеспечивающими выполнение условия конечности интеграла энергии.

Для поиска коэффициентов B_n, C_n, D_n воспользуемся граничными условиями, в частности, такими:

$$V_2 = U_2 + V_1 + U_1, \quad r = a_0, \quad 0 \leq \theta \leq \gamma,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} [U_2 + V_1 + U_3 - U_4] = 0, \quad r = a_1, \quad \theta_0 < \theta \leq \gamma.$$

Переходя от граничных условий к рядам (10)–(12), и, применив ортогональность функций Лежандра, получаем связь между искомыми коэффициентами в виде бесконечного числа систем двух уравнений с тремя наборами неизвестных $B_n, C_n, D_n, n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned} B_n a_0^{-\nu_n-1} + C_n a_0^{\nu_n} &= J_n^{(1)} - q_1 T_n a_0^{\nu_n} b_0^{-\nu_n-1}; \\ B_n a_1^{-\nu_n-1} + C_n a_1^{\nu_n} - D_n a_1^{-\nu_n-1} &= -q_1 T_n a_1^{-\nu_n-2} b_0^{\nu_n+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя все граничные условия, получаем вспомогательную систему функциональных уравнений относительно B_n, C_n, D_n :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \{-(\nu_n + 1) a_1^{-\nu_n} [B_n + D_n] + C_n \nu_n a_1^{\nu_n+1}\} P_{\nu_n}(\cos \theta) &= \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_n + 2) a_1^{-\nu_n-1} q_1 T_n b_0^{\nu_n+1} P_{\nu_n}(\cos \theta), \quad \theta_0 < \theta \leq \gamma, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n a_1^{-\nu_n-1} P_{\nu_n}(\cos \theta) = V_2. \quad 0 \leq \theta < \theta_0. \quad (15)$$

Зная связь между коэффициентами B_n, C_n, D_n (13) и функциональные уравнения (14)–(15), можно построить различные парные системы функциональных уравнений относительно коэффициентов B_n или коэффициентов C_n , или коэффициентов $D_n, n = 1, 2, 3, \dots$. При этом системы будут отличаться не только матричными операторами, но и правыми частями и, естественно, потребуют различных подходов для построения численно–аналитических алгоритмов. Прежде всего заметим, что система (14)–(15) является неопределённой, так как содержит три набора искомым коэффициентов B_n, C_n, D_n . Существенно различным является асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ множителей при искомым коэффициентах. Прямые численные методы неэффективны для решения таких систем. Применим метод регуляризации матричного оператора задачи и получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Выполним эта работу в несколько шагов. Построим такую систему функциональных уравнений, в которой можно выделить и обратить наиболее ёмкие части матричных и интегральных операторов по соответствующим нормам пространств последовательностей и функциональных пространств. Требуемой системой является система функциональных уравнений относительно коэффициентов D_n потенциала U_4 (12). Для построения требуемой системы парных функциональных уравнений сначала исключим коэффициенты B_n, C_n из функциональных уравнения (14)–(15). Для этого решим систему линейных алгебраических уравнений (13) относительно B_n, C_n и выразим B_n, C_n через $D_n, n \geq 1$. В результате получим искомую систему парных функциональных уравнений относительно коэффициентов D_n . Система включает уравнение (15) и новое уравнение (16), получаемое из (14):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{(2\nu_n + 1) D_n a_0^{-\nu_n-1} + (2\nu_n + 1) T_n^{(1)} a_0^{\nu_n} b_0^{-\nu_n-1} +$$

$$\begin{aligned}
& +T_n^{(1)}a_1^{-2\nu_n-2}a_0^{\nu_n}b_0^{\nu_n+1} - (2\nu_n+2)T_n^{(1)}a_1^{-1}a_0^{-\nu_n-1}b_0^{\nu_n+1} - \\
& -(2\nu_n+1)J_n^{(1)}\}(\delta_n)^{-1}P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \gamma, \quad (16)
\end{aligned}$$

где

$$T_n^{(1)} = T_n q_1, \quad \delta_n = a_0^{-\nu_n-1}a_1^{\nu_n} - a_1^{-\nu_n-1}a_0^{\nu_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Полученная система удобна для преобразования в интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

5. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода

Сначала систему функциональных уравнений (15), (16) эквивалентными преобразованиями свведём к вспомогательной системе функциональных уравнений относительно новых коэффициентов $Y_n, n \geq 1$ (18), а затем последовательно свведём к двум вспомогательным интегральным уравнениям Вольтерра и к итоговому интегральному уравнению Фредгольма:

$$\begin{aligned}
Y_n = & \{D_n a_0^{-\nu_n-1} + T_n^{(1)} a_0^{\nu_n} b_0^{-\nu_n-1} - J_n^{(1)}\}(\delta_n)^{-1} + \\
& + \frac{T_n^{(1)}(\delta_n)^{-1}}{2\nu_n+1} [a_1^{-2\nu_n-2} a_0^{\nu_n} b_0^{\nu_n+1} - (2\nu_n+2) a_1^{-1} a_0^{-\nu_n-1} b_0^{\nu_n+1}], \quad (18)
\end{aligned}$$

где коэффициенты D_n введены в (12), величины $T_n^{(1)}$ и δ_n — в (17).

Теперь в полученные функциональные уравнения введём главный параметр малости $\varepsilon_n^{(0)}$:

$$\varepsilon_n^{(0)} = \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^{2\nu_n+1}, \quad a_0 < a_1, \quad n \geq 1, \quad (19)$$

и введём четыре вспомогательные параметра малости $\varepsilon_n^{(i)}, i = 1, 2, 3, 4$:

$$\varepsilon_n^{(1)} = \left(\frac{a_0}{a_1}\right)^{\nu_n}, \quad \varepsilon_n^{(2)} = \left(\frac{a_0}{b_0}\right)^{\nu_n+1}, \quad \varepsilon_n^{(3)} = \left(\frac{b_0}{a_1}\right)^{\nu_n+1}, \quad \varepsilon_n^{(4)} = \frac{1}{2\nu_n+1}, \quad (20)$$

где

$$a_0 < b_0 < a_1, \quad \nu_n \rightarrow \infty.$$

Этим получаем итоговую систему парных функциональных уравнений относительно коэффициентов Y_n :

$$\sum_{n=1}^{\infty} Y_n \mu_n P_{\nu_n}(\cos\theta) =$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} J_n^{(1)} \varepsilon_n^{(1)} P_{\nu_n}(\cos \theta) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(1)} \{ \varepsilon_n^{(1)} \varepsilon_n^{(2)} + \varepsilon_n^{(0)} \varepsilon_n^{(3)} \varepsilon_n^{(4)} - \\ - \varepsilon_n^{(3)} [1 + \varepsilon_n^{(4)}] \} P_{\nu_n}(\cos \theta), \quad 0 \leq \theta < \theta_0, \quad (21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2\nu_n + 1) Y_n P_{\nu_n}(\cos \theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \gamma, \quad (22)$$

где

$$\varepsilon_n^{(0)} = 1 - \mu_n, \quad \lim \mu_n = 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Для преобразования (21)–(22) сначала выполним интегральную подстановку (24) в (22), аналогичную косинус преобразованию Фурье на конечном отрезке для вспомогательной функции $\psi(t)$:

$$Y_n = \eta_n \int_0^{\theta_0} \psi(t) \cos \left(\nu_n + \frac{1}{2} \right) t dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (24)$$

где константа η_n известна и пропорциональна норме $P_{\nu_n}(\cos \theta)$ в $L_2(0, \gamma)$:

$$\eta_n = \left\{ \sin^2 \gamma [P_{\nu_n}(\cos \theta)]'_{\theta=\gamma} \cdot [P_{\nu}(\cos \gamma)]'_{\nu=\nu_n} \right\}^{-1}. \quad (25)$$

Отметим, что знаменатель константы η_n (25) отличен от нуля, так как корни ν уравнения $P_{\nu}(\cos \gamma) = 0$ и корни θ для $P_{\nu_n}(\cos \theta) = 0$ являются простыми, а также $0 < \gamma < \pi$, $0 < \theta < \pi$.

Полагаем, что функция $\psi(t)$ в (24) является непрерывно дифференцируемой функцией на $[0, \gamma]$. Подстановка (24) обращает уравнение (22) в тождество. Действительно, сначала в (22) изменим порядки интегрирования и суммирования, так как последовательность Y_n , $n \geq 1$ принадлежит l^2 . После этого выполним интегрирование по частям и используем суммы известных комплекснозначных рядов [13]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \exp(int) = \frac{\exp(-t/2)}{\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}}, \quad 0 < t < \theta < \pi, \quad (26)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \left[\cos \left(\nu_n + \frac{1}{2} \right) t \right] P_{\nu_n}(\cos \theta) = \\ = I(\theta, t) + (2(\cos t - \cos \theta))^{-\frac{1}{2}}, \quad 0 < t < \theta < \gamma, \quad (27)$$

$$I(\theta, t) = - \int_0^{\infty} \frac{P_{-\frac{1}{2}+ir}(-\cos \gamma)}{P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos \gamma)} \cdot P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos \theta) \cdot \frac{\cosh(tr)}{\cosh(\pi r)} dr, \quad (28)$$

где $P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos \gamma)$ – функция конуса комплексного индекса $-\frac{1}{2} + ir$ аргумента $\cos \gamma$, а $\cosh(tr)$ – косинус гиперболический аргумента tr . Правые части

равенств (26), (27) являются производящими функциями для рядов в левых частях. Для получения, в частности, равенства (27) необходимо рассмотреть функцию комплексного переменного z

$$M(z; t, \theta, \gamma) = e^{i(z+\frac{1}{2})t} P_z(\cos \theta) [Q_z(\cos \gamma) + Q_{-z-1}(\cos \gamma)] / P_z(\cos \gamma) \quad (29)$$

и параметров t, θ, γ из $(0, \pi)$ [2]–[6], где $P_z(\cos \theta), Q_z(\cos \theta)$ функции Лежандра соответственно первого и второго рода комплексного индекса z . Используя связь функций $Q_z(\cos \gamma)$ и $Q_{-z-1}(\cos \gamma)$:

$$Q_z(\cos \gamma) - Q_{-z-1}(\cos \gamma) = \pi \operatorname{ctg}(z\pi) P_z(\cos \gamma),$$

упростим функцию $M(z; t, \theta, \gamma)$ (29) и затем выполним интегрирование функции $M(z; t, \theta, \gamma)$ по замкнутому контуру, содержащему отрезок прямой $z = -1/2 + it, |t| < \infty$ и полуокружность радиуса t , замыкающую контур вправо. Функция $M(z; t, \theta, \gamma)$ имеет в выбранной замкнутой ограниченной области конечное число изолированных особенностей – полюсов первого порядка за счет обращения в нуль, в частности, функций $P_z(\cos \gamma)$ в точках $z = \nu_n$. Далее применим теорему о вычетах в полюсах $z = \nu_n$ и $z = n, n = 1, 2, 3, \dots$. Затем воспользуемся следующей леммой К. Жордана [13]: Если на некоторой последовательности дуг окружностей $C_{R_n} : |z| = R_n, \operatorname{Re}(z) > -a, (R_n \rightarrow \infty), a$ – фиксировано, функция $g(z)$ стремится к нулю равномерно относительно $\arg(z)$, то для любого положительного числа λ получаем: $\lim \int_{C_{R_n}} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0, n \rightarrow \infty$. Значит, зная суммы рядов (26) и (27) и отслеживая области изменения переменных t и θ в этих рядах и в уравнении (22), убеждаемся, что действительно уравнение (22) превращается в тождество. Отметим, что этот факт позволяет в результате получить вместо парной системы интегральных уравнений одно интегральное уравнение Фредгольма второго рода [16].

Преобразование функционального уравнения (21) начнем с подстановки вместо функций Лежандра $P_{\nu_n}(\cos \theta)$ их интегрального представления Мелера–Дирихле:

$$P_{\nu_n}(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos(\nu_n + \frac{1}{2})y}{\sqrt{\cos y - \cos \theta}} dy. \quad (30)$$

Воспользуемся равномерной сходимостью ряда в (21) и поменяем порядок интегрирования и суммирования. С помощью этой операции преобразовываем в итоге сумматорное равенство (21) в однородное интегральное уравнение Вольтерра типа Абеля первого рода $\int_0^\theta f(y) / \sqrt{\cos y - \cos \theta} dy = 0$ с корневой особенностью в ядре, возникшей в связи с использованием (30) для функций Лежандра; здесь функция $f(y) \in L_2(0, \gamma), f(0) = 0$ и $f(y)$ содержит тригонометрические ряды и интеграл типа (27), (28). Решим интегральное уравнение Вольтерра, применяя интегральное преобразование Абеля (применяя композицию с ядром уравнения), и найдем его единственное решение

$f(y) = 0, 0 \leq y < \gamma$. Теперь запишем полученное решение $f(y) = 0, 0 \leq y < \theta_0 < \gamma$ в виде нового уравнения, также учтя, что $f(y)$ содержит ряды по тригонометрическим функциям и интеграл типа (27), (28). В полученном уравнении $f(y) = 0$ вновь используем ряд (26) и интегральное представление для функций Лежандра (30), решаем новое интегральное уравнение уравнение типа Абея второго рода, и в результате получаем искомое неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции $\psi(y)$ (24):

$$\begin{aligned} \psi(y) - \int_0^{\theta_0} [K_1(y, t) - K_2(y, t)] \psi(t) dt = \\ = \frac{2}{\pi} \cos \frac{y}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} T_n^{(2)} \cos \left(\nu_n + \frac{1}{2} \right) y, \quad 0 \leq y < \theta_0, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$T_n^{(2)} = -J_n^{(1)} \varepsilon_n^{(1)} + T_n^{(1)} \{ \varepsilon_n^{(1)} \varepsilon_n^{(2)} + \varepsilon_n^{(0)} \varepsilon_n^{(3)} \varepsilon_n^{(4)} - \varepsilon_n^{(3)} [1 - \varepsilon_n^{(4)}] \}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (32)$$

$$K_1(y, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^{(0)} \eta_n \left[\cos \left(\nu_n + \frac{1}{2} \right) y \right] \left[\cos \left(\nu_n + \frac{1}{2} \right) t \right], \quad (33)$$

$$K_2(y, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_{-\frac{1}{2}+ir}(-\cos \gamma) \cdot \cosh(yr) \cdot \cosh(tr)}{P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos \gamma) \cdot \cosh(\pi r)} dr, \quad (34)$$

где величины $J_n^{(1)}$ введены в (9), $T_n^{(1)}$ введены в (17), $\varepsilon_n^{(0)}$ – в (19), $\varepsilon_n^{(1)} - \varepsilon_n^{(4)}$ – в (20), а η_n – в (25).

6. Выводы

1). Интегральное уравнение (31) имеет единственное решение в $L_2(0, \gamma)$. Действительно, ядро уравнения является непрерывной функцией аргументов y, t , так как в ядре ряд и интеграл сходятся равномерно по y, t на сегмента $[0, \gamma]$; правая часть уравнения также непрерывна на $[0, \gamma]$. Интегральный оператор задачи является компактным [14] в пространстве $L_2(0, \gamma)$. Для уравнения справедлива альтернатива Фредгольма. Соответствующее однородное интегральное уравнение Фредгольма имеет единственное тривиальное решение.

2). Уравнение (31) разрешимо как аналитически, так и численно [14], [16]. Действительно, правая часть и функция $K_1(y, t)$ (33) уравнения (31) являются бесконечно дифференцируемыми функциями по y, t на $[0, \gamma]$, а подынтегральная функция $K_2(y, t)$ (34) при фиксированных y, t на $[0, \gamma]$ убывает к нулю быстрее экспоненты $\exp(-\alpha r), 0 < \alpha$ при $r \rightarrow \infty$. При этом норму в $L_2(0, \gamma)$ интегрального оператора можно получить меньше, чем 1,

именно за счёт выбора достаточно малого угла (раскрыва конуса) γ , близкого к нулю, или достаточно большого угла γ , близкого к π .

Решив интегральное уравнение (31) и имея целью изучать потенциал в области Q_1 , находим, что связь между коэффициенты C_n и D_n имеет вид:

$$C_n = a_1^{-\nu_n-1} \{ a_0^{-\nu_n-1} [D_n - T_n^{(1)} b_0^{\nu+1} a_1^{-1}] - J_n^{(1)} + a_0^{\nu_n} T_n^{(1)} b_0^{-\nu-1} \}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (35)$$

3). Самостоятельным в теоретическом и прикладном плане случаем задачи является вариант, когда угол раскрыва конуса γ близок к $\pi/2$. В этом случае наша задача эквивалентна в определённом смысле задаче на двух одинаковых сферических противоположных сегментах в присутствии секционированной сферы и двух симметрично расположенных зарядов (соответственно величин q_1 и $-q_1$), т. е. задаче в отсутствии конуса. При этом связь между коэффициенты C_n и D_n также имеет вид (35).

4). Отметим, что частным случаем рассматриваемых задач является вариант, когда конус (идеально проводящий бесконечно тонкий) пронизывает секционированную сферу. Образуются при этом две области (одна внутри конуса, а другая область вне конуса), разделённые частями секционированной сферы и содержащие, например, электростатический заряд и дополнительный сферический сегмент. Этот вариант задачи представляет отдельный интерес и требует применения другой интегральной подстановки по сравнению с использованной в данной работе (24).

5). Развитый в работе подход решения задачи электростатики допускает обобщение на более сложные композиции источников электростатических полей и геометрических поверхностей проводников [1]–[3], [15] с различными, в том числе материальными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yuan-Hong Lee, Meng-Ying Tsai, Chang-Fa Yang. A 3D RFID Static Test System Using a Spherical Near-Field Antenna Measurement Chamber // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2013, – **61**, no 1. – P. 362–370.
2. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем // Журнал технической физики. – 1938, – **8**, №10–11. – С.1193–1206.
3. Уфлянд Я.С. О решении одного класса задач электростатики методом парных рядов // Письма в Журнал технической физики. – 1976, – **2**, №17. – С.794–798.
4. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках // Журнал технической физики. – 1962, – **32**, №4. – С.381–394.

5. Шестопапов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: Изд. ХГУ, – 1973. – 288 с.
6. Кравченко В.Ф., Сиренко Ю.К., Сиренко К.Ю. Преобразование и излучение электромагнитных волн открытыми резонансными структурами. – М.: Физматлит, – 2011. – 318 с.
7. Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т. Аналітико–числові методи в теорії дифракції хвиль на кінчних і клиноподібних поверхнях. – Київ: Наукова Думка, – 2006. – 275 с.
8. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопапов В.П. Излучение волн сферой с отверстием //Журнал вычислит. матем. и матем. физики. – 1977, – **17**, №2. – С.394–406.
9. Резуненко В.А. Рассеяние плоской волны сферой с круговым отверстием //Электромагнитные волны и электронные системы. – 2005, – **10**, №8. – С.5–15.
10. Резуненко В.А. Интегральное уравнение задачи электростатики для сферического сегмента и диэлектрического закругления конуса //Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, Серія Математика, прикладна математика і механіка. – 2006. – **749**. – С.50–56.
11. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, – 1987. – 312 с.
12. Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова Думка, – 1977. – 362 с.
13. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, – 1973. – 736 с.
14. Садовничий В.А. Теория операторов. – М.: Высшая школа, – 1999. – 368 с.
15. Singh B.M., Rokne J.G. and Dhaliwal R.S. Two–Dimensional Electrostatic Problem in a Plane With Earthed Elliptic Cavity due to One or Two Collinear Charged Electrostatic Strips // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2007, **2007**. Article ID 60595. – Pages 9.
16. Xia M. Y., Zhang G.H., Dai G. L. and Chan C. H. Stable Solution of Time Domain Integral Equation Methods Using Quadratic B-Spline Temporal Basis Functions //Journal of Computational Mathematics. – 2007, no 25. – P.374-384.

Статья получена: 10.10.2012; окончательный вариант: 11.11.2012;
принята: 15.11.2012;