Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.968.519.6 № 1030, 2012, с.79–85

Дискретна математична модель дифракції Е-поляризованої електромагнітної хвилі на періодичній системі ідеально провідних циліндричних поверхонь

Ю. М. Бахмат
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
майдан Свободи, 4, 61022, Харків, Україна
Bahmat23@mail.ru

У статті побудована математична модель дифракції Е-поляризованої електромагнітної хвилі на періодичній системі ідеально провідних кругових циліндричних поверхонь. Побудована також дискретна математична модель на базі метода дискретних особливостей. Проведений чисельний експеримент.
Ключові слова: задача дифракції, граничне інтегральне рівняння.

Бахмат Ю. Н., **Дискретная математическая модель дифракции Е-поляризованной электромагнитной волны на периодической системе идеально проводящих цилиндрических поверхностей.** В статье построена математическая модель дифракции Е-поляризованной электромагнитной волны на периодической системе идеально проводящих круговых цилиндрических поверхностей. Построена также дискретная математическая модель данной задачи на базе метода дискретных особенностей. Проведен численный эксперимент.
Ключевые слова: задача дифракции, граничное интегральное уравнение.

Yu. N. Bakhmat, **The discrete mathematical model of diffraction of E-polarized electromagnetic waves by the periodic system of ideally conducting cylindrical surfaces.** The article deals with the mathematical model of diffraction of E-polarized electromagnetic waves on periodic ideally conducting circular cylindrical surfaces. Discrete mathematical model build above mentioned problems of diffraction based on Discrete features.The numerical experiment has been made.
Keywords: diffraction problem, the boundary integral equation.

2000 Mathematics Subject Classification: 45E02, 65N05.

Вступ

Ціллю даної роботи є побудова дискретної математичної моделі дифракції E-поляризованої електромагнітної хвилі на замкнених циліндричних поверхнях, використовуючи метод дискретних особливостей, для того, щоб потім провести чисельний експеримент. У якості циліндричної поверхні буде братися круговий циліндр. При малому радіусу циліндра ми отримаємо систему тонких проводів. Цікаво буде порівняти дві задачі, в одній з яких буде братися періодична система кругових циліндрів, а в іншій - система стрічок. Саме питання про порівняння на даний момент є недослідженим, але планується його дослідження. У роботі використовується метод дискретних особливостей, бо він ефективно працює, коли виникають інтегральні рівняння з особливостями.

Постановка задачі

Нехай

$$Ł = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} L_n$$

це система, що складається з простих гладких замкнених кривих , L_n - направляюча циліндричної поверхні (у даному випадку система кругових циліндрів), твірні якої паралельні OZ. Розглядається перетин площиною, паралельною площині XOY, тобто задача двовимірна. Розглядається прямокутна система координат, тоді параметричні рівняння направляючих циліндричних поверхонь будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} \xi_n = x(\varphi) + 2ln \\ \eta_n = y(\varphi) \qquad\qquad \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Перейдемо до періоду 2π:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{\pi}{l} \cdot x(\varphi) + 2\pi n \\ \\ y_n = \dfrac{\pi}{l} \cdot y(\varphi) \qquad\qquad \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Позначимо

$$\Omega = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} int L_n.$$

Розсіяне поле будемо шукати у вигляді потенціалу простого прошарку [1]:

$$u(y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_L v(x) G(x,y) ds_x, \qquad y \in C\overline{\Omega}, \tag{1}$$

де

$$G(x,y)=\frac{\pi}{2i}H_0^{(1)}(\chi|x-y|). \tag{2}$$

Позначимо $u^0(x)$ - падаюче поле, $u(x)$ - розсіяне поле. Оскільки розглядається випадок Е-поляризації, то на поверхні виконується гранична умова Діріхле:

$$u^0(y)=-u(y), \tag{3}$$

тоді [3]

$$u^0(y)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_L v(x)G(x,y)ds_x, \qquad y\epsilon L. \tag{4}$$

У роботі розглядається падаюче поле у вигляді

$$u^0(x,y)=e^{i\chi(\sin\alpha\cdot x-\cos\alpha\cdot y)}, \quad \alpha=\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Дискретна математична модель у випадку Е-поляризації

Перейдемо до визначеного інтегралу, перепишемо (5) у вигляді

$$u^0(x_0(\varphi_0),y_0(\varphi_0))=\frac{-1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}G(x_n(\varphi),y_n(\varphi),x_0(\varphi_0),y_0(\varphi_0))\cdot$$

$$\cdot v(x_0(\varphi),y_0(\varphi))\frac{\pi}{l}\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}d\varphi,\ \varphi_0\epsilon[0,2\pi). \tag{6}$$

Перетворимо вираз

$$W(x,y)=\frac{\pi}{2i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}H_0^{(1)}(\chi\sqrt{(x+2\pi n)^2+y^2}).$$

Використовуючи Фур'є представлення функції Ханкеля [3]:

$$H_0^{(1)}(\chi\sqrt{x^2+y^2})=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\chi(\alpha x+\sqrt{1-\alpha^2}|y|)}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}},$$

а також формулу сумування Пуасона [3]:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}f(\nu)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{2\pi ixk}dx,$$

маємо [3]:

$$W(x,y)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\gamma_n|y|}}{\gamma_n}\cos(nx)+\frac{e^{i\chi|y|}}{2i\chi},$$

де

$$\gamma_n = \sqrt{n^2 - \chi^2},\ Re(\gamma_n) \geq 0,\ Im(\gamma_n) \leq 0.$$

Остаточно маємо

$$W(\varphi, \varphi_0) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma_n |y_0(\varphi) - y_0(\varphi_0)|}}{\gamma_n} \cos(n(x_0(\varphi) - x_0(\varphi_0)))+$$

$$+\frac{e^{i\chi |y_0(\varphi) - y_0(\varphi_0)|}}{2i\chi}. \qquad (7)$$

Перепишемо (6), враховуючи (7),

$$u^0(x_0(\varphi_0), y_0(\varphi_0)) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} W(\varphi,\varphi_0)\cdot v(x_0(\varphi), y_0(\varphi))\frac{\pi}{l}\sqrt{(x'(\varphi)^2 + (y'(\varphi))^2)}d\varphi,$$

$$\varphi_0 \epsilon [0, 2\pi). \qquad (8)$$

Отримане рівняння (8) - інтегральне рівняння, ядро якого містить логарифмічну особливість. Виділимо особливість

$$-u^0(x_0(\varphi_0), y_0(\varphi_0)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|\sin\frac{\varphi - \varphi_0}{2}| u^*(\varphi)d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} W^*(\varphi,\varphi_0)u^*(\varphi)d\varphi,$$

$$\varphi_0 \epsilon [0, 2\pi), \qquad (9)$$

де

$$W^*(\varphi,\varphi_0) = W(\varphi,\varphi_0) - \ln|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}|,$$
$$u^*(\varphi) = v(x_0(\varphi), y_0(\varphi))\frac{\pi}{l}\sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\varphi))^2}.$$

Тепер побудуємо дискретну математичну модель даної задачі. Спочатку перейдемо до задачі для наближеного розв‘язку. Замінимо усі гладкі функції у (9) відповідними інтерполяційними тригонометричними поліномами:

$$-(P_n^{(2)}u^0)(x_0(\varphi_0), y_0(\varphi_0)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}|(P_n^{(1)}u^*)(\varphi)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(P_n^{(2)}P_n^{(1)}W^*)(\varphi,\varphi_0)(P_n^{(1)}u^*)(\varphi)d\varphi,\ \varphi_0\epsilon[0,2\pi), \qquad (10)$$

де

$$(P_n^{(i)}g)(\varphi) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} g(\varphi_k^{(i,n)})\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\varphi - \varphi_k^{(i,n)})}{\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_k^{(i,n)})},$$

$$\varphi_k^{(1,n)} = \varphi_k^n = \frac{2\pi k}{2n+1}, \quad k = 0, 1, ..., 2n,$$

$$\varphi_j^{(2,n)} = \varphi_{0j}^n = \frac{2j+1}{2n+1}\pi, \quad j = 0, 1, ..., 2n.$$

Скориставшись інтерполяційними квадратурними формулами [5], взявши у якості точок колокації другий набір точок, маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$-u^0(x_0(\varphi_{0j}^n), y_0(\varphi_{0j}^n)) = -\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\{ln2 + \sum_{p=1}^{n}\frac{\cos(p(\varphi_{0j}^n - \varphi_k^n))}{p}\} \cdot u^*(\varphi_k^n) +$$

$$+\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} W^*(\varphi_k^n, \varphi_{0j}^n) \cdot u^*(\varphi_k^n), \qquad j = 0, 1, 2, ..., 2n. \tag{11}$$

Амплітуда розсіяного поля

Розсіяне поле виражається у вигляді потенціалу

$$u(y) = \frac{1}{2\pi}\int_L v(x) \cdot G(x, y) ds_x, \quad y \,\epsilon\, C\overline{\Omega}. \tag{12}$$

Перейшовши від криволінійного інтегралу першого роду до визначеного, маємо

$$u(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(x_n(\varphi), y_n(\varphi), y) \cdot v(x_0(\varphi), y_0(\varphi))\frac{\pi}{l}\sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\phi,$$

$$y \,\epsilon\, C\overline{\Omega}. \tag{13}$$

Знову використавши Фур'є представлення функції Ханкеля, формулу сумування Пуасона, а також метод Крилова прискорення збіжності рядів [4], перетворили (13):

$$u(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W_1^*(\varphi, y) \cdot u^*(\varphi) d\varphi, \qquad y \,\epsilon\, C\overline{\Omega}, \tag{14}$$

де

$$W_1^*(\varphi, y) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{e^{-n|x_2(\varphi)-y_2|}}{n} - \frac{e^{-\gamma_n|x_2(\varphi)-y_2|}}{\gamma_n}\right)\cos(n\frac{\pi}{l}(x_1(\varphi) - y_1)) +$$

$$+\frac{e^{i\chi|x_2(\varphi)-y_2|}}{2i\chi} + \frac{1}{2}\ln(2e^{-|x_2(\varphi)-y_2|}(\mathrm{ch}(x_2(\varphi)-y_2) - \cos(x_1(\varphi)-y_1))), \quad y = (y_1, y_2),$$

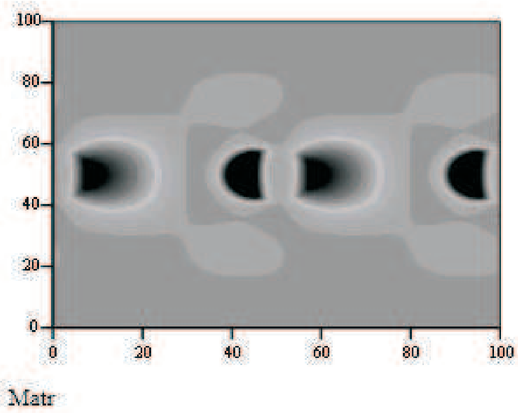

Рис. 1: Амплітуда розсіяного поля, R=$\frac{1}{2}$, l=$\frac{3}{2}$, $\chi = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$

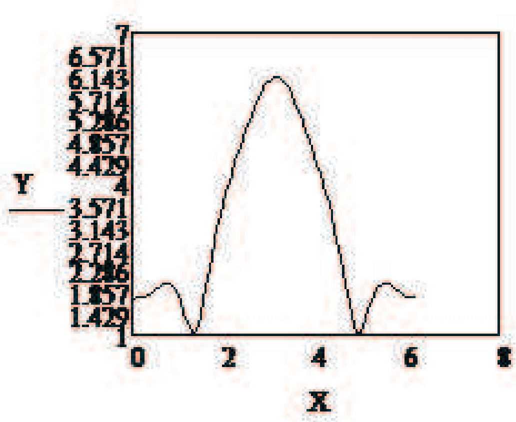

Рис. 2: Графік модуля розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$u^*(\varphi) = v(x_0(\varphi), y_0(\varphi))\frac{\pi}{l}\sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\varphi))^2}.$$

Потім, замінивши усі гладкі функції відповідними інтерполяційними тригонометричними поліномами і використавши квадратурні формули [5], остаточно маємо

$$u(y) = \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} W_1^*(\varphi_k^n, y) \cdot u^*(\varphi_k^n), \qquad y \in C\overline{\Omega}.$$

У нашому випадку вектори електричного поля представляються у вигляді

$$E(y,t) = E(y_1, y_2)e^{i\omega t},$$

$|u(y)|$ - амплітуда розсіяного поля.

Чисельний експеримент

По побудованій дискретній математичній моделі був проведений чисельний експеримент, а саме досліджена амплітуда розсіяного поля.

Висновок

Отже, у роботі приведена математична модель задачі дифракції Е-поляризованої електромагнітної хвилі на періодичній системі циліндричних поверхонь, а також побудована дискретна математична модель. У роботі був застосований метод дискретних особливостей.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. - Харьков: из-во Харьковского университета, 1973. - 287с.

2. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.М. Математические вопросы метода дискретных токов // Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие.Часть 2. - Харьков: ХГУ, 1992. - 145с.

3. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. - Киев: Наук. думка, 1984. - 344с.

4. Душкин В.Д. Сингулярные интегральные уравнения задач дифракции Е-поляризованных волн на периодических структурах, состоящих из цилиндров и лент // Труды Второй Всеукраинской конференции молодых учёных Украины, - Киев, 1995. - 320 с.- Рукопись депонирована в ГНТБ Украины 4.09.95 Т 20-34 Деп. С.120-124.

5. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учебное пособие. - Харьков, ХНУ, 2002 г. - 92 с. Издание 2-ое, исправленное.

Статья получена: 01.11.2012; окончательный вариант: 10.11.2012; принята: 18.11.2012.