Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 533.72 № 1018, 2012, с.21–29

Швидко релаксуючі розв'язки рівняння Больцмана для газу з пружних куль

В. Д. Гордевський, Ю. А. Сисоєва

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, 61077, Харків, Україна
gordevskyy2006@yandex.ru,
Харківський національний економічний університет, пр. Леніна, 9а, 61001, Харків, Україна
sysoyeva@yandex.ru

Для нелінійного кінетичного рівняння Больцмана у випадку моделі пружних куль знайдено новий наближений розв'язок. Він забезпечує довільну мализну рівномірно-інтегрального відхилу з вагою між частинами рівняння й дуже швидко прямує до нуля із зростанням часу.
Ключові слова: Пружні кулі, рівняння Больцмана, відхил.

Гордевский В. Д., Сысоева Ю. А., **Быстро релаксирующие решения уравнения Больцмана для газа из твердых сфер.** Для нелинейного кинетического уравнения Больцмана в случае модели твердых сфер найдено новое приближенное решение. Оно обеспечивает произвольную малость равномерно-интегральой невязки с весом между частями уравнения и очень быстро стремится к нулю с возрастанием времени.
Ключевые слова: Твердые сферы, уравнение Больцмана, невязка.

V. D. Gordevskyy , Yu. A. Sysoyeva, **Rapidly relaxing solutions of the Boltzmann equation for a gas of hard spheres.** The new approximate solution for the nonlinear kinetic Boltzmann equation in the case of the model of hard spheres is found. It ensures the infinitesimality of the uniform-integral weighted discrepancy between the sides of the equation and very fast tends to zero with increasing of the time.
Keywords: Hard spheres, Boltzmann equation, discrepancy.

2000 Mathematics Subject Classification: 76P05; 45K05; 82C40; 35Q55.

1. ВСТУП

У випадку моделі пружних куль, як відомо, кінетичне рівняння Больцмана має вигляд [1]:

$$D(f) = Q(f,f), \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + (v, \frac{\partial f}{\partial x}), \tag{2}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv_1 \int\limits_{\Sigma} d\alpha (v-v_1,\alpha)[f(t,v_1',x)f(t,v',x)- \\ - f(t,v_1,x)f(t,v,x)], \tag{3}$$

де $f = f(t,v,x)$ — функція розподілу молекул, яка шукається; t — час; $x = (x^1,x^2,x^3)$ — координата молекули в $\mathbb{R}^3$; $v = (v^1,v^2,v^3)$ — її швидкість; $d > 0$ — діаметр (нагадаємо, що всі молекули в цій моделі є однаковими кулями одиничної маси). Через $\frac{\partial f}{\partial x}$ позначено просторовий градієнт функції f (інколи для скорочення будемо писати просто f'). Нарешті, вектор α належить одиничній сфері $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, а через v, v_1, v', v_1' позначено швидкості молекул — "партнерів по зіткненню" відповідно до та після нього, причому

$$v' = v - \alpha(v-v_1,\alpha), \qquad v_1' = v + \alpha(v-v_1,\alpha). \tag{4}$$

Розв'язки системи

$$D = Q = 0 \tag{5}$$

відіграють особливу роль в теорії цього рівняння, бо вони описують рівноважні стани газу, і в той же час утворюють єдиний на цей момент клас розв'язків, відомий в явному вигляді для даної моделі. Вони називаються максвеліанами, оскільки перший найпростіший (залежний лише від v) розв'язок системи (5) було знайдено Масвеллом ще в 1859 році. В подальшому було здобуто узагальнення цього розв'язку: спочатку на неоднорідний випадок (f залежить від v та x), і нарешті — на нестаціонарний (f залежить ще й від t). Крім того, можливі типи максвеліанів були докладно проаналізовані та класифіковані з точки зору їх фізичного сенсу й геометричної структури [2 – 5].

Більш складні (нерівноважні, тобто ті, що не задовольняють систему (5)) розв'язки рівняння (1) – (4) вдається знайти лише наближено, але в строгому сенсі: вони повинні забезпечувати довільну мализну якого-небудь відхилу, тобто тієї чи іншої норми різниці між частинами цього рівняння [6 – 8].

В роботах [9 – 11] вивчалися зазначені наближені розв'язки бімодального вигляду:

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \tag{6}$$

де коефіцієнтні функції є такими:

$$\varphi_i = \varphi_i(t,x) \geq 0; \quad \varphi_i \in C^1\left(\mathbb{R}^4\right), \ i = 1,2, \tag{7}$$

а максвеліани відповідають течіям типу "прискорення — ущільнення":

$$M_i = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta_i (v-\widetilde{v}_i)^2}, \tag{8}$$

$$\rho_i = \overline{\rho}_i e^{\beta_i(\widetilde{v}_i^2 + 2\overline{u}_i x)}, \tag{9}$$

$$\widetilde{v}_i = \overline{v}_i - \overline{u}_i t, \ i = 1, 2 \tag{10}$$

(тут $\rho_i = \rho_i(t, x)$ — густина і-тої течії, $\beta_i = \frac{1}{2T_i}$ — його обернена температура; $\widetilde{v}_i = \widetilde{v}_i(t)$ — масова швидкість; $\overline{\rho}_i$, $\overline{u}_i$, $\overline{v}_i$ — скалярні та векторні константи). На цьому шляху вдалося знайти низку розв'язків зазначеної задачі, при цьому використовувався обо звичайний рівномірно-інтегральний ("змішаний") відхил вигляду

$$\Delta = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)| dv, \tag{11}$$

або його модифікація "з вагою":

$$\widetilde{\Delta} = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |D(f) - Q(f, f)| dv. \tag{12}$$

Проте у випадку використання відхилу (11) в розв'язки доводилось вводити деякі додаткові множники, що суттєво звужувало їх клас (це пов'язано зі специфікою залежності виразів (6) – (10) від t та x і необхідністю забезпечити скіеченність величини (11), тобто обмеженість інтеграла по v як функції від просторово-часових параметрів). Введення ваги у вираз (12) дозволило частково зняти зазначені обмеження і навіть здобути дещо більш сильні результати, ніж для Δ, але з іншого боку, не всі знайдені раніше варіанти вдається перенести на випадок $\widetilde{\Delta}$.

Дана робота присвячена відшуканню, з використанням відхилу вигляду (12), наближеного розв'язку рівняння Больцмана, який не міг задовольняти його в сенсі мінімізації величини (11). Він шукається при деякому додатковому припущенні про структуру коефіцієнтних функцій (7) і описує процес дуже швидкої релаксації газу при прямуванні часу до нескінченності.

2. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Спочатку з'ясуємо питання про низькотемпературну поведінку (тобто при $\beta_i \to +\infty$, $i = 1, 2$) відхилу з вагою, визначеною формулою (12), за припущенням, що функції φ_i, $i = 1, 2$ й параметри, які входять до бімодального розподілу (6) – (10), пов'язані деякими умовами.

Теорема. *Нехай*

$$\varphi_i(t, x) = \psi_i(t, x) exp\{-2\beta_i \overline{u}_i x\}, \qquad i = 1, 2, \tag{13}$$

де функції ψ_i є такими, що добутки множників

$$e^{\beta_i(\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2} \cdot \frac{1}{1+|t|}, \qquad i = 1, 2, \tag{14}$$

на наступні величини:

$$\psi_i;\ \frac{\partial\psi_i}{\partial t};\ \left|\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right|,\ \psi_i t;\ t\left(\overline{u}_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right), \qquad i=1,2, \tag{15}$$

обмежені по t, x *на* $\mathbb{R}^4$.

Нехай, крім того, виконуються співвідношення:

$$\overline{u}_i = \frac{s_i\overline{u}_{0i}}{\sqrt{\beta_i}}, \qquad i=1,2, \tag{16}$$

$$\overline{v}_i = \frac{s_i\overline{v}_{0i}}{{\beta_i}^{k_i}}, \qquad i=1,2, \tag{17}$$

де $\overline{u}_{0i}$, $\overline{v}_{0i} \in \mathbb{R}^3$ *—довільні фіксовані вектори,* $s_i > 0$ *— деякі константи, а показники ступеня* k_i *такі:*

$$k_i \geq \frac{1}{2}, \qquad i=1,2. \tag{18}$$

Тоді існує така величина $\widetilde{\Delta}'$, *що*

$$\widetilde{\Delta} \leq \widetilde{\Delta}', \tag{19}$$

причому вона має такі скінченні границі:

а) при $k_i > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\lim_{\beta_i\to+\infty, i=1,2} \widetilde{\Delta}' = \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho_i} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{t^2\overline{u}_{0i}^2 s_i^2} \cdot \left| \frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\psi_i s_i^2 t\overline{u}_{0i}^2 \right| \right\} + \\ + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} s_i\overline{\rho}_i|\overline{u}_{0i}| \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{t^2\overline{u}_{0i}^2 s_i^2}\psi_i \right\}.\end{aligned} \tag{20}$$

б) при $k_i = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\lim_{\beta_i\to+\infty, i=1,2} \widetilde{\Delta}' = \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho_i} \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{s_i^2(\overline{v}_{0i}-\overline{u}_{0i}t)^2} \cdot \left| \frac{\partial\psi_i}{\partial t} + 2\psi_i s_i^2 t\overline{u}_{0i}^2 \right| \right\} + \\ + 2\sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i \left(\frac{|\overline{u}_{0i}|}{\sqrt{\pi}} s_i + s_i^2 \left|(\overline{u}_{0i}, \overline{v}_{0i})\right| \right) \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \left\{ \frac{1}{1+|t|} e^{s_i^2(\overline{v}_{0i}-\overline{u}_{0i}t)^2}\psi_i \right\}\end{aligned} \tag{21}$$

Доведення. Як показано в [11], підстановка виразів (6) – (10) до рівняння (1) – (4), а потім до відхилу (12), з урахуванням того, що обидва максвеліани M_1, M_2 задовольняють систему рівнянь (5), після деяких перетворень і замін змінних, дозволяє обрати величину $\widetilde{\Delta}'$ для нерівності (19) в наступному вигляді:

$$\widetilde{\Delta}' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \frac{1}{1+|t|} \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \Bigg[\int_{\mathbb{R}^3} \Bigg| \frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} +$$
$$+ \varphi_1\varphi_2\rho_j(t,x)\frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t - \overline{v}_j + \overline{u}_j t - \frac{w}{\sqrt{\beta_i}} \right| e^{-w^2} dw \Bigg| \times \tag{22}$$
$$\times \rho_i(t,x)\pi^{-3/2} e^{-u^2} du + \varphi_1\varphi_2\pi^{-2} d^2 \rho_1(t,x)\rho_2(t,x) \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^6} e^{-w^2-u^2} \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t - \overline{v}_j + \overline{u}_j t - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right| dw du \Bigg].$$

Продиференцюємо тепер вирази (13):

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \frac{\partial\psi_i}{\partial t} exp\{-2\beta_i \overline{u}_i x\}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x} = exp\{-2\beta_i \overline{u}_i x\} \cdot \left\{ \frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\beta_i \psi_i \overline{u}_i \right\}, \qquad i = 1, 2, \tag{24}$$

Якщо ввести позначення:

$$F_{ij} = F_{ij}(u,t,w) = \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{v}_j - (\overline{u}_i - \overline{u}_j)t - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right|, \qquad i \neq j, \tag{25}$$

то підставляючи (23), (24) в (22), з використанням техніки роботи [10], після очевидних спрощень, здобудемо:

$$\widetilde{\Delta}' = \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^4} \sum_{i=1}^{2} \overline{\rho}_i e^{\beta_i(\overline{v}_i - \overline{u}_i t)^2} \frac{1}{1+|t|} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left| \frac{\partial\psi_i}{\partial t} + A_i + B_i \right| + A_i \right] e^{-u^2} du, \tag{26}$$

де позначемо:

$$A_i = \psi_1\psi_2 \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \overline{\rho_j} e^{\beta_j(\overline{v}_j - \overline{u}_j t)^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-w^2} F_{ij} dw, \qquad i \neq j, \tag{27}$$

$$B_i = \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \overline{v}_i - \overline{u}_i t\right) + 2\beta_i\psi_i \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\beta_i}}(u, \overline{u}_i) - (\overline{u}_i, \overline{v}_i) + t\overline{u}_i^2 \right\}. \tag{28}$$

Саме існування скінченної величини $\widetilde{\Delta}'$ випливає, як легко бачити, з припущення про обмеженість величин (15) після множення на (14) та формул (25) – (28). Можливість переходу до низькотемпературної границі ($\beta_1, \beta_2 \to +\infty$) в правій частині (26) може бути обгрунтованою таким же чином, як в роботах [10, 11] з урахуванням (16), (17), однак результати у випадках а) та б), про які йде мова в умові даної теореми, будуть різними. Дійсно, в той час як

$$\lim_{\beta_i\to+\infty, i=1,2} F_{ij} = 0 \tag{29}$$

при будь-якому $k_i > 0$, границі інших величин, що входять до (26) – (28), є такими:

$$\lim_{\beta_i\to+\infty, i=1,2} e^{\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2} = \begin{cases} e^{t^2\overline{u}_{0i}^2 s_i^2}, & k_i > \frac{1}{2}, \\ e^{s_i^2(\overline{v}_{0i}-\overline{u}_{0i}t)^2}, & k_i = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{30}$$

і, значить, завжди

$$\lim_{\beta_i\to+\infty, i=1,2} A_i = 0, \tag{31}$$

а також

$$\lim_{\beta_i\to+\infty, i=1,2} B_i = \begin{cases} 2\psi_i\big(t\overline{u}_{0i}^2 s_i^2 - s_i(u,\overline{u}_{0i})\big), & k_i > \frac{1}{2}, \\ 2\psi_i\big(t\overline{u}_{0i}^2 s_i^2 - (u,\overline{u}_{0i})s_i - (\overline{u}_{0i},\overline{v}_{0i})s_i^2\big), & k_i = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{32}$$

Остаточні оцінки зверху для модуля й супремума, що входять до (26), після тривіальних інтегрувань за змінною u з використанням (30) – (32), очевидно, приводять до (20) або (21). Теорему доведено.

Отриманий результат дозволяє сформулювати наслідки, які дають певні достатні умови, що забезпечують розв'язання поставленої задачі.

Наслідок 1. *Нехай (16), (17) справедливі при* $k_i > \frac{1}{2}$, *а функції* ψ_i, $i = 1,2$ *в рівності (13) мають вигляд:*

$$\psi_i(t,x) = C_i(x)e^{-s_i^2\overline{u}_{0i}^2 t^2}, \tag{33}$$

де $C_i(x) > 0$ *— довільні гладкі обмежені на* $\mathbb{R}^3$ *разом із* $C_i'(x)$ *функції. Тоді відхил* $\widetilde{\Delta}$ *є довільно малим при достатньо малих* s_1, s_2, T_1, T_2, *тобто виконується наступне твердження:*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall s_1, s_2 : 0 < s_1, s_2 < \delta,$$

$$\exists\beta_0 < 0 : \forall\beta_1, \beta_2 > \beta_0$$

$$\widetilde{\Delta} < \varepsilon. \tag{34}$$

Доведення. Перш за все перевіримо, що функції вигляду (33) при $k_i > \frac{1}{2}$ та достатньо малих $T_1, T_2 > 0$ забезпечують виконання й решти вимог теореми, тобто обмеженість всіх виразів (15) після множення на множник (14). Розглянемо, наприклад, четверте з них (з урахуванням (16), (17)):

$$\begin{aligned} &t\psi_i e^{\beta_i(\overline{v}_i-\overline{u}_i t)^2}\cdot\frac{1}{1+|t|} = \\ &= \frac{t}{1+|t|}C_i(x)exp\left\{-s_i^2\overline{u}_{0i}^2t^2 + \beta_i\left(\frac{s_i\overline{v}_{0i}}{\sqrt{\beta_i}} - \frac{s_i\overline{u}_{0i}}{\beta_i^{k_i}}t\right)^2\right\} = \\ &= \frac{t}{1+|t|}C_i(x)\cdot exp\left\{-t^2\overline{u}_{0i}^2s_i^2\left(1-\beta_i^{1-2k_i}\right) - 2s_i^2(\overline{v}_{0i},\overline{u}_{0i})t\beta_i^{\frac{1}{2}+k_i} + s_i^2\overline{v}_{0i}^2\right\}. \end{aligned} \tag{35}$$

Оскільки T_i, $i = 1, 2$ є малими, тобто β_i — великими, а показник $1-2k_i$ при зазначених k_i від'ємний, то весь коефіцієнт при t^2 в показнику експоненти менше за 0, і незалежно від знаку решти доданків це приводить до її обмеженості по t. Ще два множника в (35), очевидно, також обмежені на $\mathbb{R}^4$, що й було треба (тим самим наше твердження перевірене й для першого з виразів (15)). Для решти трьох можна провести аналогічні розміркування, бо в даному випадку, очевидно,

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} = -2ts_i^2 \overline{u}_{0i}^2 \psi_i, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = C_i'(x) e^{-s_i^2 \overline{u}_{0i}^2 t^2}. \tag{37}$$

Таким чином, вірно твердження пункту а) нашої теореми, тобто рівність (20), причому перший доданок в ньому в силу (36) просто-таки дорівнює нулю, а другий супремум є скінченним завдяки (33). Звідси ясно, що другий доданок прямує до нуля при $s_1, s_2 \to 0$, а це разом з (19) і може бути записаним у вигляді (34).

Наслідок 2. *Нехай виконано всі умови попереднього наслідку, проте тепер при*

$$k_i = \frac{1}{2}, \tag{38}$$

і, крім того, додаткову умову:

$$\overline{u}_i \perp \overline{v}_i, \qquad i = 1, 2. \tag{39}$$

Тоді твердження (34) залишається в силі.

Доведення проводиться за тією ж схемою, але вираз (35) завдяки (38), (39) сильно спроститься:

$$\frac{t}{1+|t|} C_i(x) exp\left\{ s_i^2 \overline{v}_{0i}^2 \right\}, \tag{40}$$

і його обмеженість тим більше є очевидною. Оскільки (36), (37) не змінилися, можемо скористуватись твердженням пункту б) теореми, тобто рівністю (21), причому перший доданок в ньому знову зникає, а другий, як і раніше, прямує до нуля при $s_1, s_2 \to 0$ (скінченність останнього супремума в (21) є очевидною внаслідок (33) та (39)).

Наприкінці зробимо декілька зауважень з приводу отриманих в цій роботі результатів.

Зауваження 1. Знайдені тут розв'язки вигляду (33) раніше не зустрічались. Їх особливістю є дуже швидке (швидше якого завгодно ступеня експоненти) спадання за часом, тобто при $t \to \pm\infty$, що й виправдовує назву "швидко релаксуючі розв'язки" в заголовку статті. Ще раз підкреслимо, що їх відшукання стало можливим тільки завдяки розгляду "відхилу з вагою" вигляду (12), запропонованого в [11], та й те лише за умови нескінченної

нескінченної мализни множників s_i, $i = 1, 2$, які теж не брали участі в результатах попередніх робіт [9 – 11], присвячених дослідженню максвеліанів типу "прискорення — ущільнення".

Зауваження 2. В наслідках 1, 2 описано дещо різні варіанти поведінки параметрів, що входять в рівняння Больцмана та в сам бімодальний розподіл f, які приводять до одного й того ж результату, а саме нескінченної мализни величини $\widetilde{\Delta}$. Так, якщо вектори $\overline{v}_i$ прямують до нуля швидше (випадок $k_i > \frac{1}{2}$), то їх напрямок в просторі залишається довільним; якщо ж швидкість їх спадання менше (що відповідає (38)), то необхідним є залучення додаткової вимоги (39), яка забезпечує обмеженість по t відповідних "фрагментів" (15) з вагою (14) (дивись також другий доданок в (21)), і, значить, скінченність самого відхилу (12) та його границі.

Цікаво, що при відмові від припущення (18) взагалі, або зміні ступеня знаменника в (16), як можна показати, результати граничних переходів по β_i, $i = 1, 2$ стають просто-таки нескінченними, або тривіальними.

Зауваження 3. Зазначимо також, що в даній роботі параметр d, що входить в (3), залишається фіксованим, в той час як при отриманні деяких попередніх результатів розглядається й граничний перехід $d \to 0$. Фізично це означає, що "швидко релаксуючі розв'язки" можливі для больцманівського газу, тобто при скінченних значеннях числа Кнудсена [1], а не тільки для навколовільномолекулярних течій, тобто при числі Кнудсена, що прямує до нескінченності (дуже сильно розріджений газ).

ЛІТЕРАТУРА

1. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. – М. : Мир, 1978. – 495 с.

2. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. – М. : ИЛ, 1960. – 118 с.

3. Grad H. On the Kinetic theory of rarefied gases // Comm. Pure and Appl. Math. – 1949. – V. 2, **4**, P. 331–407.

4. Фридлендер О. Г. Локально-максвелловский решения уравнения Больцмана // Прикл. мат. и мех. – 1965. – Т. 29, **вып. 5**. – С. 973– 977.

5. Gordevskyy V. D. On the non-stationary Maxwellians // Math. Meth. Appl. Sci. (MMA 455). – 2004. – V. 27, **2**. – P. 231–247.

6. Гордевский В. Д. Приближенное бимодальное решение уравнения Больцмана для твердых сфер // Матем. физ., анализ, геом. – 1995. – Т. 2, **1**. – С. 168–176.

7. Гордевский В. Д. Приближенное двухпотоковое решение уравнения Больцмана // ТМФ. – 1998. – Т. 114, **1**. – С. 126–136.

8. Gordevskyy V. D. Transitional regime between vortical states of a gas // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications (NA 3752). – 2003. – V. 53, **3–4**. – P. 481–494.

9. Гордевський В. Д., Андріяшева Н. В. Перехідний режим між деякими локально-максвелівськими течіями // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2007. – Т. 4, **3**. – С. 51–57.

10. Gordevskyy V. D., Andriyasheva N. V. Interaction between "accelerating-packing" flows in a low-temperature gas // Math. Phys., Anal., Geom. – 2009. – V. 5, **1**. – P. 38–53.

11. Гордевський В. Д., Лемешева Н. В. Перехідний режим між течіями типу "прискорення-ущільнення" // Вісн. Харк. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна, сер. "Мат., прикл. мат, мех.". – 2010. – **931**. – С. 49–58.

Стаття одержана: 14.10.2011; перероблений варіант: 17.11.2011; прийнята: 18.11.2011.