

Нелинейные нормальные формы вынужденных колебаний кусочно-линейных систем

Б. В. Успенский, К. В. Аврамов

*Национальный технический университет
"Харьковский политехнический институт", Украина
Институт проблем машиностроения
им. А.Н.Подгорного НАН Украины
Uspensky.kubes@gmail.com, kvavr@kharkov.ua,*

Предложен метод исследования нелинейных нормальных форм вынужденных колебаний кусочно-линейных систем. Метод основан на процедуре Раушера, которая неавтономную динамическую систему сводит к итерационному процессу, на каждом шаге которого решается автономная система.

Ключевые слова: нелинейные нормальные формы, кусочно-линейные системы, вынужденные колебания.

Успенський Б. В., Аврамов К. В. **Нелінійні нормальні форми змущених коливань кусково-лінійних систем.** Запропоновано метод дослідження нелінійних нормальних форм змущених коливань в кусково-лінійних системах. Метод базується на процедурі Раушера, яка зводить неавтономну динамічну систему до ітераційного процесу, на кожному кроці якого розв'язується автономна динамічна система.
Ключові слова: нелінійні нормальні форми, кусково-лінійні системи, вимушені коливання.

Uspensky B. V., Avramov K. V. **Nonlinear normal modes of forced oscillations of piecewise linear systems.** A method of analysis of nonlinear normal modes for forced oscillations in piecewise linear systems is proposed. The method is based at Rauscher technique that turns non-autonomous dynamical system to an iterative process. Each step of this process resolves an autonomous dynamical system.

Keywords: nonlinear normal modes, piecewise linear systems, forced oscillations.

2000 Mathematics Subject Classification 70K45.

1. Введение

Механические системы с кусочно-линейными упругими характеристиками описывают широкий класс технических систем, к которым относятся валопроводы с упругими муфтами, силовые передачи двигателей внутреннего сгорания, системы со шлицевыми соединениями. Анализ вынужденных колебаний систем с кусочно-линейными упругими характеристиками проводился многими исследователями. Периодические колебания, их бифуркации и хаотические движения в таких системах исследовались в работах [1]–[3]. Луо [4] для исследования колебаний кусочно-линейной системы с одной степенью свободы применяет отображение Пуанкаре. В статье [5] метод гармонического баланса применяется для исследования субгармонических и супергармонических резонансов систем с зазорами, совершающей крутильные колебания. В статье [6] исследуются вынужденные периодические движения в системе с одной степенью свободы и симметричной кусочно-линейной упругой характеристикой. Исследованы симметричные движения с двойным ударом об ограничение. Нелинейные нормальные формы (ННФ) Каудерера-Розенберга в кусочно-линейных системах исследуются в статье [7]. Здесь рассматривается асимптотический предел кусочно-линейной упругой характеристики. Предложен аналитический метод определения ННФ.

В этой статье предложен численный метод поиска ННФ вынужденных колебаний кусочно-линейной системы, основанный на “автономизации” системы с помощью метода Раушера и последующем построении ННФ полученной автономной системы. Такая методика подробно рассмотрена в работах [8], [9].

2. Постановка задачи и основные соотношения

Рассматривается консервативная механическая система с кусочно-линейной упругой характеристикой. Свободные колебания этой системы описываются следующими уравнениями:

$$M_i \cdot \ddot{x}_i = \Pi_{x_i}, \quad (1)$$

где x_i – обобщенные координаты системы; Π – потенциальная энергия системы; Π_{x_i} – производные потенциальной энергии системы, содержащие кусочно-линейные функции; M_i – диагональные элементы матрицы масс системы.

Исследуем вынужденные колебания этой системы под действием малого периодического воздействия, приложенного к k -й дискретной массе системы. Колебания этой системы описываются следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} M_i \cdot \ddot{x}_i &= \Pi_{x_i}, i \neq k; \\ M_i \cdot \ddot{x}_k &= \Pi_{x_k} + \epsilon h \cdot \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (2)$$

где ϵ - малый параметр; ω - частота внешней периодической силы.

Целью настоящей статьи является определение ННФ Каудерера-Розенберга в системе (2). Под нормальными формами Каудерера-Розенберга понимается такой режим движения, при котором все обобщённые координаты x_i , $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ выражаются в виде однозначной функции одной обобщённой координаты x_k : $x_i = x_i(x_k)$. Независимая обобщённая координата x_k называется ведущей, а зависящие от неё обобщённые координаты - ведомыми. Для решения системы (2) строится итерационный процесс, на каждом шаге которого неавтономная правая часть $\epsilon h \cdot \cos(\omega t)$ выражается через ведущую координату. Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса, производится расчет ННФ автономной системы. ННФ системы (1) могут быть найдены из следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений в конфигурационном пространстве:

$$2x_i'' \frac{h - \Pi}{1 + x_i'^2} - \Pi_{x_k} x_i' = -\Pi_{x_i}, \quad (3)$$

где $x_i' = dx_i/dx_k$; h - значение общей энергии системы. Решение уравнений (3) производится с учётом граничных условий, которые выполняются на эквипотенциальной поверхности [9]: $\Pi = h$. Эквипотенциальная поверхность пересекается с ННФ в двух точках, которые имеют следующие значения ведущей координаты: X_{min} , X_{max} . Эти граничные условия имеют следующий вид:

$$\Pi_{x_k} x_i' = \Pi_{x_i}, i = 1, \dots, n, i \neq k. \quad (4)$$

Для приближенного решения уравнения (3) применяется метод коллокаций. ННФ представляется в виде укороченного ряда Тейлора:

$$x_i(x_k) = a_{i0} + a_{i1} \cdot x_k^2 + \dots + a_{im} x_k^m, i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Приближенное представление решения (5) вводится в уравнение (3). Предполагается, что это уравнение точно выполняется в точках коллокаций $x_{kl} \in [X_{min}, X_{max}]$; $l = 1, \dots, m+1$. Крайние точки коллокаций удовлетворяют следующим соотношениям: $x_{k1} = X_{min}$; $x_{km} + 1 = X_{max}$. В результате получается система $(n-1)(m+1) + 2$ нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров a_{ij} , $i = 1, \dots, n$; $j = 0, \dots, m$, X_{min} , X_{max} . Эта система решается методом Ньютона. В результате решения этой системы определяется ННФ. Движение на полученной ННФ описывается осциллятором с одной степенью свободы. Для вывода уравнения этого осциллятора ННФ (5) вводится в k -ое уравнение движения (1). В результате получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$M_k \ddot{x}_k = \Pi_{x_k}(x_k). \quad (6)$$

3. Анализ вынужденных колебаний

Для расчета ННФ при вынужденных колебаниях строится итерационная процедура. Предположим, что итерация с номером ν состоялась и приближение для ННФ $x_i^{(\nu)}(x_k)$ получено. Рассмотрим k -ое неавтономное уравнение системы (2), в которое введено полученное приближение для ННФ $x_i^{(\nu)}(x_k)$. Решение этого уравнения имеет период $2\pi/\omega$. Это движение можно представить в виде ряда Фурье, содержащего гармоники $\cos(k\omega t)$. Такое движение можно найти, например, методом гармонического баланса. Такой ряд перестроим в степенной ряд параметра $c = \cos(\omega t)$ так:

$$x_k^{(\nu)}(t) = d_0 + d_1 c + d_2 c^2 + \dots, \quad (7)$$

где d_0, d_1, \dots – известные параметры. Этот ряд перестраивается в следующий степенной ряд:

$$\cos(\omega t) = b_0 + b_1 x_k^{(\nu)} + b_2 (x_k^{(\nu)})^2 + \dots \quad (8)$$

Используя ряд (8), построим псевдоавтономную динамическую систему. Для этого решение (8) введем в систему (2) и получим, так называемую, псевдоавтономную динамическую систему. ННФ в этой системе определяются подходом, предложенным в разделе 2.

Итак, полученная ННФ является результатом $(\nu + 1)$ итерации. Ее можно представить так: $x_i^{(\nu+1)}(x_k)$.

Для реализации описанного итерационного процесса рассмотрим первую итерацию. Положим, $x_i \neq 0$; $i = 1, \dots, n$; $k \neq i$. С помощью метода гармонического баланса решим k -уравнение системы (2). Это решение перестроим в виде ряда (8), который введем в систему (2). В результате получим псевдоавтономную динамическую систему. В этой системе найдем ННФ, которая будет результатом первой итерации: $x_i^{(1)}(x_k)$.

Резонансные движения кусочно-линейных систем (2), в основном, близки к моногармоническим. Поэтому с высокой степенью точности, соотношение (8) можно представить так:

$$\epsilon h \cdot \cos(\omega t) = 2(X_{max} - X_{min})^{-1} \cdot \epsilon h (x_k(t) - 0.5(X_{max} + X_{min})). \quad (9)$$

4. Нелинейные крутильные колебания силовой передачи транспортного двигателя

Рассмотрим механическую систему с кусочно-линейной упругой характеристикой, которая моделирует крутильные колебания силовой передачи транспортного двигателя [1]:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 - c_2(\theta_2 - \theta_1) = 0; \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + c_2(\theta_2 - \theta_1) + f(\theta_2) = \epsilon h \cos(\omega t). \end{cases} \quad (10)$$

$$f(\theta_2) = \begin{cases} c_1\theta_2 + (c_1 - c_2)\Delta & \text{при } \Delta < \theta_2; \\ c_2\theta_2 & \text{при } -\Delta \leq \theta_2 \leq \Delta; \\ c_1\theta_2 - (c_2 - c_1)\Delta & \text{при } \theta_2 < -\Delta. \end{cases}$$

К системе (10) применим следующую замену переменных: $\theta_1 \rightarrow \sqrt{I_1}\theta_1$; $\theta_2 \rightarrow \sqrt{I_2}\theta_2$. Тогда она примет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 - c_2(\sqrt{I_1})^{-1}(\theta_2/\sqrt{I_2} - \theta_1/\sqrt{I_1}) = 0; \\ \ddot{\theta}_2 + c_2(\sqrt{I_1})^{-1}(\theta_2/\sqrt{I_2} - \theta_1/\sqrt{I_1}) + g(\theta_2) = (\sqrt{I_2})^{-1}\epsilon h \cos(\omega t). \end{cases} \quad (11)$$

Потенциальную энергию системы (11) представим так:

$$\Pi(\theta_1, \theta_2) = -c_2 \cdot (\sqrt{I_1 I_2})^{-1} \theta_1 \theta_2 + c_2/(2I_1)\theta_1^2 + c_2/(2I_2)\theta_2^2 + G(\theta_2); \quad (12)$$

$$G(\theta_2) = \begin{cases} c_1/(2I_2)\theta_2^2 + (c_1 - c_2)\Delta\theta_2 \cdot & \text{при } \Delta\sqrt{I_2} < \theta_2; \\ \cdot(\sqrt{I_2})^{-1} + 0.5\Delta^2(c_1 - c_2) & \\ c_2/(2I_2)\theta_2^2 & \text{при } -\Delta\sqrt{I_2} \leq \theta_2 \leq \Delta\sqrt{I_2}; \\ c_1/(2I_2)\theta_2^2 - (c_1 - c_2)\Delta\theta_2 \cdot & \\ \cdot(\sqrt{I_2})^{-1} + 0.5\Delta^2(c_1 - c_2) & \text{при } \Delta\sqrt{I_2} < \theta_2. \end{cases}$$

В качестве ведущей координаты динамической системы (10) θ_2 . Предельные значения колебаний этой обобщенной координаты обозначим через θ_{2max} и θ_{2min} . Возмущающую силу заменим автономизированным соотношением (9). Тогда приходим к следующей псевдоавтономной динамической системе:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 - c_2(\sqrt{I_1})^{-1}(\theta_2/\sqrt{I_2} - \theta_1/\sqrt{I_1}) = 0; \\ \ddot{\theta}_2 + c_2(\sqrt{I_1})^{-1}(\theta_2/\sqrt{I_2} - \theta_1/\sqrt{I_1}) + g(\theta_2) = \\ = 2(\sqrt{I_2})^{-1}(\theta_{2max} - \theta_{2min})^{-1}\epsilon h(\theta_2 - 0.5(\theta_{2max} + \theta_{2min})). \end{cases} \quad (13)$$

Потенциальную энергию системы (13) представим так:

$$\Pi(\theta_1, \theta_2) = -c_2 \cdot \sqrt{I_1 I_2}^{-1} \theta_1 \theta_2 + c_2/(2I_1)\theta_1^2 + c_2/(2I_2)\theta_2^2 + G(\theta_2) - 0.5\epsilon h \cdot (\theta_{2max} - \theta_{2min})^{-1}(0.5(\theta_2^2 - (\theta_{2max} + \theta_{2min})\theta_2)); \quad (14)$$

Проводилось исследование крутильных колебаний силовой передачи транспортного двигателя при следующих численных значениях параметров системы: $c_1 = 150$ Н·м; $c_2 = 300$ Н·м; $I_1 = 0.3$ кг·м²; $\epsilon h = 1$; $\Delta = 0.4$.

Для построения ННФ применяется численно-аналитическая процедура, рассмотренная в разделе 3.

Проводился численный анализ ННФ колебаний с периодом колебаний внешней силы 0.14876. ННФ при вынужденных колебаниях принимает следующий вид в конфигурационном пространстве системы: $\theta_1(\theta_2) = -1.208185\theta_2 - 0.0232711\theta_2^3$. Предельные значения ведущей координаты на этой форме составляют: $\theta_{2max} = 0.903839$; $\theta_{2min} = -0.903842$. Полученная ННФ является антифазной. ННФ при вынужденных колебаниях показывается жирной сплошной линией на рис.1.

Для подтверждения полученных аналитических результатов проводилось прямое численное интегрирование системы уравнений (10) из начальных условий, которые выбирались из результатов расчета ННФ. Результаты прямого численного интегрирования показаны светлой линией на рис.1. Аналитические результаты и данные прямого численного интегрирования близки.

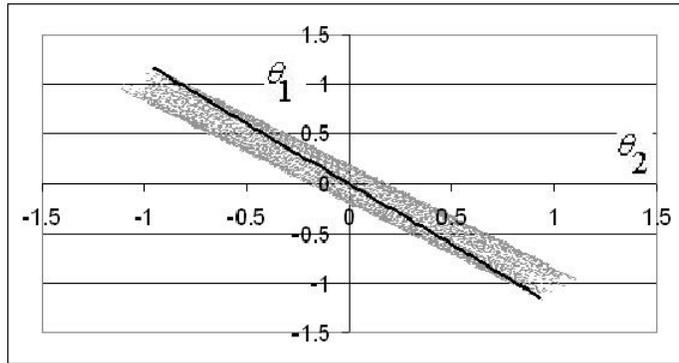


Рис. 1: ННФ при вынужденных колебаниях

Теперь исследуем синфазную ННФ колебаний при периоде колебаний внешней силы равном 0.52886. В результате расчетов, описанных в третьем разделе, была численно найдена ННФ колебаний: $\theta_1(\theta_2) = 1.05429\theta_2 - 0.00178604\theta_2^3$. Предельные значения ведущей координаты на этой ННФ составляют: $\theta_{2max} = 3.03597$; $\theta_{2min} = -3.03597$. Полученная ННФ колебаний показана жирной линией на рис.2. Результаты прямого численного интегрирования показываются светлой линией на рис.2. Итак, данные, полученные методом Раушера, и результаты прямого численного интегрирования близки.

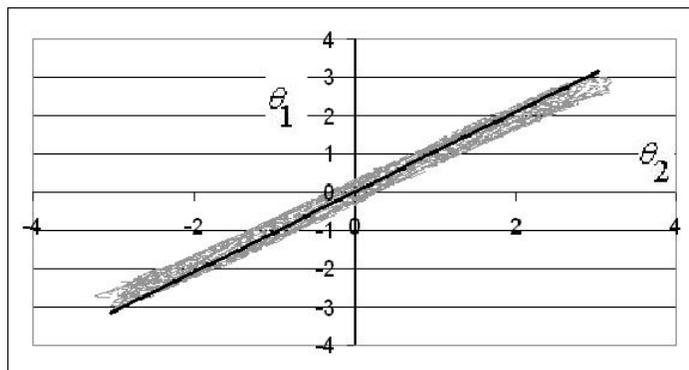


Рис. 2: Синфазная ННФ колебаний

Рассмотрим ННФ в системе (10) с билинейной нелинейной упругой характеристикой, которая имеет следующий вид:

$$f(\theta_2) = \begin{cases} c_1\theta_2 & \text{при } 0 < \theta_2; \\ c_2\theta_2 & \text{при } \theta_2 \leq 0. \end{cases}$$

Амплитудно-частотная характеристика синфазной ННФ колебаний приводится на рис.3. Как следует из этого рисунка, амплитудно-частотная характеристика рассматриваемой системы не "загибается" в область высоких или в область низких частот. Это объясняется тем, что частота колебаний билинейного осциллятора не зависит от амплитуды колебаний.

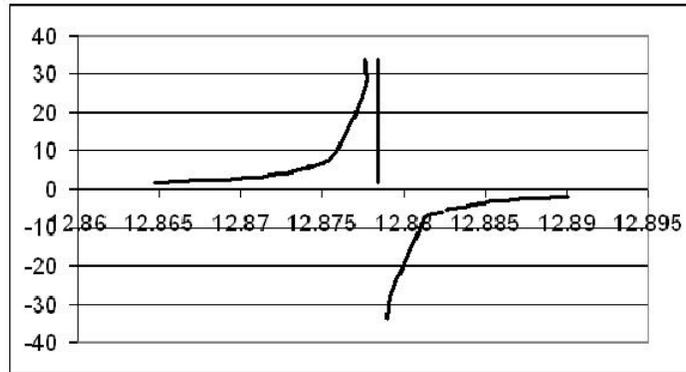


Рис. 3: Амплитудно-частотная характеристика синфазной ННФ колебаний

Заключение

В статье предложен численный метод расчёта нелинейных нормальных форм в кусочно-линейных системах под действием гармонического возбуждения. Основой этого метода является итерационная процедура, на каждом шаге которой неавтономная динамическая система с кусочно-линейной упругой характеристикой заменялась автономной. Для такой автономной динамической системы рассчитывались ННФ. Проведенные численные эксперименты свидетельствуют о том, что предложенный метод с достаточной точностью описывает нелинейные нормальные формы в кусочно-линейных системах под действием гармонического возбуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. В. Аврамов, В. Н. Карабан. Особенности развития вынужденных колебаний нелинейных силовых передач. // Известие вузов. Машиностроение. – Москва. – 1994. – **4-6**. – С. 3-7.
2. К. В. Аврамов. Анализ бифуркаций удвоения периода виброударного осциллятора с помощью метода амплитудных поверхностей. // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – Москва. – 2004. – **3**. – С. 30-37.

3. К. В. Аврамов, В. Н. Карабан. Резонанс при хаотических колебаниях дискретных динамических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками. // Прикладная механика. – Киев. – 1997. – Т. 33, **7**. – С. 84-88.
4. Albert C. J. Luo. The mapping dynamics of periodic motions for a three-piecewise linear system under a periodic excitation // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – **283**. – P. 723–748.
5. T. C. Kim, T. E. Rook, R. Singh. Super- and sub-harmonic response calculations for a torsional system with clearance nonlinearity using the harmonic balance method // Journal of Sound and Vibration. – 2005. – **281**. – P. 965–993.
6. J. C. Ji. Dynamics of a piecewise linear system subjected to a saturation constraint // Journal of Sound and Vibration. – 2004. – **271**. – P. 905–920.
7. Fabrizio Vestroni, Angelo Luongo, Achille Paolone. A perturbation method for evaluating nonlinear normal modes of a piecewise linear two-degrees-of-freedom system // Nonlinear Dyn. – 2008. – **54**. – P. 379–393.
8. К. В. Аврамов. Analysis of forced vibrations by nonlinear modes // Nonlinear Dyn. – 2008. – **53**. – P. 117–127.
9. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. т.1. Модели, методы, явления.– М.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" , Институт компьютерных исследований, – 2010. – 704 с.

Статья получена: 30.04.2012; принята: 10.10.2012.