Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9:535.4 № 790, 2007, с.115-124

Электростатическое поле сферического сегмента и секционированного закругления конуса

В.А.Резуненко

Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина, Украина

Выделена и обращена сингулярная часть оператора задачи электростатики для сферического сегмента и секционированного проводящего закругления конуса. Преобразования оператора задачи выполняются с помощью техники контурного интегрирования и решения интегрального уравнения типа Абеля. Получено эффективно разрешимое интегральное уравнение Фредгольма II рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(0,\gamma)$, где γ-угол раскрыва конуса. Рассмотрены некоторые случаи постановки задачи и обобщения.
2000 Mathematics Subject Classification: 65N12, 35A25,78A45.

1. Введение.

В настоящее время имеется немного работ, посвященных решению задач электростатики для сферических сегментов в присутствии бесконечного конуса (см. [1] - [4]) . Вместе с тем, актуальность таких задач следует, в частности, из того, что сферический сегмент является хорошей моделью многих устройств: антенн, резонаторов, узлов электронных систем. Секционированное закругление конуса может быть моделью проводящих узлов и устройств техники СВЧ. Заземленный конус можно рассматривать как подстилающую поверхность с углублением. Многочисленные применения сферических и конических поверхностей, имеющих различные геометрические и физические параметры, стимулируют развитие методов решения прямых и обратных задач математической физики, электродинамики и теории дифракции на рассматриваемых поверхностях.(см. [4] - [11]). В данной работе рассмотрена электростатическая задача с небольшим числом параметров, описывающих основные характеристики моделируемых объектов и материальных сред, окружающих объекты. Целью работы является применение метода регуляризации С оператора задачи электростатики для сферического сегмента и секционированного проводящего сферического закругления конуса. В результате регуляризации задача отыскания распределения электростатического поля в трехмерном пространстве сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма II рода для вспомогательной функции. Оператор интегрального уравнения является компактным в пространстве $L_2(0,\gamma)$,

$0 < \gamma < \pi$. В работе показана, в частности, эффективная разрешимость полученного интегрального уравнения, а также получены решения для ряда предельных случаев задачи. Отметим, что решаемая в работе задача не сводится к ранее рассмотренным задачам [1] - [4].

2. Постановка задачи.

Пусть центр сферического сегмента, вершина бесконечного однополостного кругового конуса и центр секционированного сферического закругления конуса помещены в начало декартовой и сферической систем координат. Полагаем a_1 - радиус сферического сегмента, θ_0 - полярный угол, измеряющий сегмент (на сегменте $0 \leq \theta < \theta_0$), γ - угол раскрыва конуса ($0 < \theta_0 < \gamma < \pi$). Пусть потенциал V_0 сферического сегмента задан и $V_0 \neq 0$. Пусть потенциал конуса V равен нулю (конус заземлён). Пусть диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, в которой рассматриваются сферические закругления конуса, есть $\varepsilon_1 \neq 1, \mu_1 \neq 1$ и проводимость $\sigma = 0$. Пусть сферический сегмент и секционированное закругление конуса являются идеально проводящими (их проводимость $\sigma = \infty$). Пусть секционированное закругление конуса состоит из 4-х частей, разделенных непроводящими бесконечно тонкими перегородками, ориентированными параллельно плоскости $X0Y$. Полагаем, что заданы полярные углы θ_i перегородок для секций закругления

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4 = \gamma < \pi,$$

и пусть каждая (i) - секция имеет свой (независимый) потенциал $V_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$. Электростатические поля $\overrightarrow{E}$ и вектор электрической индукции $\overrightarrow{D}$ всюду вне конуса, вне сегмента и секционированного закругления конуса должны удовлетворять уравнениям Максвелла и материальным уравнениям

$$rot\overrightarrow{E} = 0, \qquad div\overrightarrow{D} = \rho, \quad \varepsilon_1\overrightarrow{D} = \overrightarrow{E}, \tag{1}$$

где ρ-плотность зарядов на поверхности проводников.

Электростатические поля, в силу однородности уравнений Максвелла (1), представим, с точностью до константы, скалярными потенциалами U, для которых $\overrightarrow{E} = -grad(U)$. При этом учитываем, что в данной постановке задачи магнитостатическое поле $\overrightarrow{H}$ и магнитная индукция $\overrightarrow{B}$ отсутствуют, т. е. $\overrightarrow{H} = 0$, $\overrightarrow{B} = 0$. Полные потенциалы U должны удовлетворять граничным условиям: а) быть непрерывными на поверхности сегмента и на поверхности каждой части секционированного закругления конуса; б) нормальные производные потенциалов должны бвть непрерывными на дополнении сферического сегмента до замкнутого сегмента. Полные потенциалы должны исчезать на бесконечности $U = O(r^{-1})$, $r \to \infty$ и удовлетворять условию конечности интеграла энергии в любой ограниченной области W пространства $\int_W (grad(U))^2 dw < \infty$. Требуется найти полные потенциалы вне конуса и вне сферических закруглений конуса. В такой постановке задача электростатики имеет единственное решение [12].

3. Ряды Фурье-Лежандра для потенциалов.

Пусть в пространстве R^3 в сферической системе координат выделены две области: $Q_1 = \{r : a_0 < r < a_1\}$, $Q_2 = \{r : r > a_1\}$; для этих областей $\theta \in [0, \gamma]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. В первой области Q_1 будем искать вторичные потенциалы $U_1, \quad U_2$, а во второй области Q_2 - потенциал U_3. Для этих областей Q_1, Q_2 на поверхности конуса при $r \in [0, \infty), \theta = \gamma$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ вторичные потенциалы по условию должны обращаться в нуль:

$$U_1 = U_2 = U_3 = 0. \tag{2}$$

Разделим переменные в уравнениях Максвелла (1) в сферической системе координат. Вторичные потенциалы представим рядами Фурье - Лежандра, обеспечивающими выполнение условия излучения и условия (2):

$$U_1 = \frac{1}{\varepsilon_1}\sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-\nu_n - 1} P_{\nu_n}(\cos\theta), \quad a_0 < r < a_1, \tag{3}$$

$$U_2 = \frac{1}{\varepsilon_1}\sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{\nu_n} P_{\nu_n}(\cos\theta), \quad a_0 < r < a_1, \tag{4}$$

$$U_3 = \frac{1}{\varepsilon_1}\sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{-\nu_n - 1} P_{\nu_n}(\cos\theta), \quad r > a_1. \tag{5}$$

Условия (2) для рядов (3)-(5) будут выполнены, так как для функций Лежандра $P_\nu(\cos\theta)$ первого рода аргумента $\cos\theta$ найдутся при фиксированном θ из интервала $0 < \theta < \pi$ положительные индексы ν_n, являющиеся собственными значениями соответствующего самосопряженного оператора Штурма - Лиувилля и являющиеся решениями трансцендентного уравнения [13],[15] - [16]:

$$P_{\nu_n}(\cos\gamma) = 0, \qquad 0 < \gamma = \theta < \pi, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Коэффициенты A_n, D_n, C_n рядов (3)-(5) будем искать в гильбертовом пространстве $\widetilde{l}^2$ с некоторым весом, обеспечивающем выполнение условия конечности интеграла энергии и, кроме (2), граничных условий:

$$U_3 = V_0, \quad 0 \le \theta < \theta_0, \quad r = a_1, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial U_3}{\partial r} = \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial [U_2 + U_1]}{\partial r}, \quad r = a_1, \quad \theta_0 < \theta \le \gamma, \tag{7}$$

$$(U_1 + U_2)|_{r=a_0} = \begin{cases} V_1, & 0 \le \theta < \theta_1, \\ V_2, & \theta_1 < \theta < \theta_2, \\ V_3, & \theta_2 < \theta < \theta_3, \\ V_4, & \theta_3 < \theta < \theta_4. \end{cases} \tag{8}$$

4. Функциональные уравнения.

Построим парные сумматорные функциональные уравнения относительно неизвестных коэффициентов $C_n, n \geqslant 1$ потенциала U_3 (см.(5)). Первое вспомогательное функциональные уравнение получим, используя граничное условие (6):

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\sum_{n=1}^{\infty} C_n a_1^{-\nu_n-1} P_{\nu_n}(\cos\theta) = V_0, \quad 0 \le \theta < \theta_0. \tag{9}$$

Второе вспомогательное функциональное уравнение получим из граничного условия (7):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\nu_n+1)a_1^{-\nu_n-2}(C_n - A_n) + \nu_n B_n a_1^{\nu_n-1}\right] P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \le \gamma. \tag{10}$$

Функциональное уравнение (10) содержит три последовательнтсти неизвестных коэффициентов A_n, B_n, C_n, $(n = 1, 2, 3, ...)$ потенциалов U_1, U_2, U_3 (см.(3)- (5)). Сначала исключим из уравнения (10) коэффициенты A_n, B_n, выразив их через коэффициенты C_n. Для этого в граничных условиях (6) - (8) воспользуемся ортогональностью функций Лежандра $P_{\nu_n}(\cos\theta)$ с весом $sin\theta$ на интервале $(0, \gamma)$ и выполним интегрирование по θ. В результате получим для каждого n, $(n = 1, 2, 3, ...)$, систему линейных алгебраических уравнений (относительно неизвестными A_n, B_n):

$$A_n a_1^{-\nu_n-1} + B_n a_1^{\nu_n} = C_n a_1^{-\nu_n-1}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} A_n a_0^{-\nu_n-1} + \frac{1}{\varepsilon_1} B_n a_0^{\nu_n} = D_n, \tag{12}$$

где

$$D_n = \int_0^{\gamma} (U_1 + U_2)|_{r=a_0} P_{\nu_n}(\cos\theta) sin\theta \, d\theta. \tag{13}$$

Решение линейной системы (11), (12) единственно , так как её определитель (для каждого $n \ge 1$) отличен от нуля при выполнении неравенства $a_0 < a_1$, которое задано при постановке исходной задачи электростатики. Решение линейной системы (11), (12), очевидно, зависит от $n \ge 1$:

$$A_n = \frac{C_n a_1^{-\nu_n-1} a_0^{\nu} - \varepsilon_1 D_n a_1^{\nu_n}}{a_0^{\nu_n} a_1^{-\nu_n-1} - a_0^{-\nu_n-1} a_1^{\nu_n}}, \tag{14}$$

$$B_n = \frac{a_1^{-\nu_n-1}[\varepsilon_1 D_n - C_n a_0^{-\nu_n-1}]}{a_0^{\nu_n} a_1^{-\nu_n-1} - a_0^{-\nu_n-1} a_1^{\nu_n}}. \tag{15}$$

Подставим A_n, B_n (14)-(15) в (10) и приходим к новому вспомогательному функциональному уравнению:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\nu_n+1)C_n a_0^{-\nu_n-1} - (2\nu_n+1)\varepsilon_1 D_n}{[a_0^{\nu_n} a_1^{-\nu_n-1} - a_1^{\nu_n} a_0^{-\nu_n-1}]a_1^2} P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \gamma. \tag{16}$$

Этим получили уравнения (9), (16) относительно (только одних) коэффициентов $C_n, n \geq 1$. Теперь в (9), (16) выполним переобозначения:

$$X_n = \frac{C_n}{a_0^{2\nu_n+1} a_1^{-\nu_n} - a_1^{\nu_n+1}} + \frac{D_n \varepsilon_1}{a_{n0}^{\nu} a_1^{-\nu_n} - a_1^{\nu_n+1} a_0^{-\nu_n-1}} \quad , \tag{17}$$

$$\widetilde{\varepsilon_n} = a_0^{\nu_n+1} a_1^{-\nu_n-1}, \qquad \widetilde{V} = V_0 * \varepsilon_1. \tag{18}$$

В результате получаем парную систему сумматорных функциональных уравннений, которую далее удобно преобразовывать в интегральные уравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [X_n - a_0^{\nu_n+1} a_1^{-\nu_n-1} D_n \varepsilon_1] P_{\nu_n}(\cos\theta)$$

$$= \widetilde{V} P_0(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} X_m \widetilde{\varepsilon_m} P_{\nu_m}(\cos\theta), \quad 0 \leqslant \theta < \theta_0, \tag{19}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2\nu_n+1) X_n \, P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \quad \theta_0 < \theta \leq \gamma. \tag{20}$$

5. Интегральные уравнения I и II рода.

Система функциональных уравнениях (19), (20) является сравнительно сложной: а) в систему входят ряды по функциям Лежандра первого рода с дробными индексами $\nu_n, n \geqslant 1$; б) коэффициенты в (19), (20) при неизвестных X_n имеют асимптотику при $n \to \infty$, отличающуюся на порядок. До сих пор общего метода решения таких уравнений не найдено. Прямые численные методы решения таких систем и в настоящее время, время сверх мощных компьютеров, мало пригодны. Сведем задачу отыскания коэффициентов X_n, $n \geqslant 1$ к решению интегрального уравнения II рода для вспомогательной функции. Для этого в (20) сначала выполним подстановку [1] - [4]

$$X_n = \beta_n \int_0^{\theta_0} \psi(t) \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) t \, dt, \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{21}$$

$$\beta_n = \left\{ \sin^2\gamma \left(\frac{\partial}{\partial\theta} P_{\nu_n}(\cos\theta) \right) |_{\theta=\gamma} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial\nu} P_\nu(\cos\gamma) \right) |_{\nu=\nu_n} \right\}^{-1}. \tag{22}$$

Полагаем, что функция $\psi(t)$ в (21) является непрерывно дифференцируемой функцией на $[0, \gamma]$. В результате подстановки (21),(22) в уравнение (20) убеждаемся, что (20) выполяется тождественно. Чтобы убедится в этом, сначала следует в (20) поменять порядки интегрирования и суммирования, так как последовательность $X_n, n \geqslant 1$ принадлежит l^2. После этого выполним интегрирование по частям и воспользуемся известными суммами разрывных рядов [13]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp\{i(n+0.5)t\} \cdot P_n(\cos\gamma) = 1/\sqrt{2(\cos t - \cos\theta)}, \quad 0 < t < \theta < \pi, \tag{23}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n [\cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) t]\, P_{\nu_n}(\cos\theta)$$

$$= I(\theta,t) + (2(\cos t - \cos\theta))^{-\frac{1}{2}}, \qquad 0 < t < \theta < \gamma, \tag{24}$$

$$I(\theta,t) = -\int_0^{\infty} \frac{P_{-\frac{1}{2}+ir}(-\cos\gamma)}{P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos\gamma)} \cdot P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos\theta) \cdot \frac{\cosh(tr)}{\cosh(\pi r)}\, dr,$$

где $P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos\gamma)$ - функция конуса комплексного индекса $-\frac{1}{2}+ir$ аргумента $\cos\gamma$, а $\cosh(tr)$- косинус гиперболический аргумента tr. Правые части равенств (23),(24) являются производящими функциями для рядов в левых частях. Для получения, в частности, равенства (24) необходимо рассмотреть функцию комплексного переменного z

$$N(z;t,\theta,\gamma) = 2e^{i(z+\frac{1}{2})t} P_z(\cos\theta) \left[\frac{Q_z(\cos\theta)}{P_z(\cos\gamma)} - (\pi/2)\,\mathrm{ctg}(z\pi)\right] \tag{25}$$

и параметров t,θ,γ из $(0,\pi)$ [1-5], где $P_z(\cos\theta), Q_z(\cos\theta)$ функции Лежандра соответственно первого и второго рода комплексного индекса z. Затем необходимо выполнить интегрирование функции $N(z;t,\theta,\gamma)$ (25) по замкнутому контуру, содержащему отрезок прямой $z = -1/2 + it, \quad |t| < \infty$ и полуокружность, замыкающую контур вправо. Далее необходимо применить, в частности, теорему о вычетах в полюсах $z = \nu_n$ и $z = n, n = 1,2,3,\ldots,$ функции (25) за счет обращения в нуль, в частности, функций $P_z(\cos\gamma)$, а также воспользоваться леммой Жордана [14].

Преобразование функционального уравнения (19) начнем с подстановки вместо функций Лежандра $P_{\nu_n}(cos\theta)$ их интегрального представления Мелера-Дирихле

$$P_{\nu_n}(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta} [\cos(\nu_n + \frac{1}{2})y]/\sqrt{\cos y - \cos\theta}\, dy. \tag{26}$$

Воспользуемся равномерной сходимостью ряда в (19) и поменяем порядки интегрирования и суммирования. С помощью этой операции преобразовываем в итоге сумматорное равенство (19) в однородное интегральное уравнение типа Абеля первого рода $\int_0^{\theta} f(y)/\sqrt{\cos y - \cos\theta}\, dy = 0$ с корневой особеностью в ядре, возникшей в связи с применением (26) для функций Лежандра; здесь функция $f(y) \in L_2(0,\gamma)$, $f(0)=0$ и $f(y)$ содержит тригонометрические ряды и интеграл типа (24). Решим интегральное уравнение типа Абеля, применяя композицию с его ядром, и найдем единственное его решение $f(y)=0, \quad 0 \le y < \gamma$. Теперь запишем полученное решение $f(y)=0, \quad 0 \le y < \theta_0 < \gamma$ в виде нового уравнения, также учтя, что $f(y)$ содержит тригонометрические ряды и интеграл типа (23) - (25). В результате получаем искомое интегральное уравнение II рода относительно функции $\psi(y)$ (21):

$$\psi(y) - \int_0^{\theta_0} K(y,t)\,\psi(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} T_n \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) y, \qquad 0 \le y < \theta_0. \tag{27}$$

Здесь обозначены

$$K(y,t) = K_1(y,t) - K_2(y,t), \tag{28}$$

$$T_0 = \widetilde{V}, \quad \nu_0 = -0.5; \quad T_n = D_n \widetilde{\varepsilon_n} \varepsilon_1, \quad n = 1,2,3,...,$$

$$K_1(y,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\varepsilon_n}\beta_n \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) y \,\cdot\, \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) t, \tag{29}$$

$$K_2(y,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{P_{-\frac{1}{2}+ir}(-\cos\gamma)\cdot\cosh(yr)\cdot\cosh(tr)}{P_{-\frac{1}{2}+ir}(\cos\gamma)\cdot\cosh(\pi r)}\, dr, \tag{30}$$

где $\widetilde{\varepsilon_n}$ введены в (18), D_n - в (13), а β_n - в (22).

Интегральное уравнение (27) имеет единственное решение в $L_2(0,\gamma)$. Действительно, ядро (28) уравнения (27) является непрерывной функцией аргументов y,t, так как ряд (29) и интеграл (30) сходятся равномерно по y,t на сегмента $[0,\gamma]$; правая часть уравнения также непрерывна на $[0,\gamma]$. Для уравнения (27) справедлива альтернатива Фредгольма. Однородное уравнение, соответствуюшее (27), имеет единственное тривиальное решение.

Уравнение (27) разрешимо как аналитически, так и численно [16], [17]. Действительно, правая часть в (27) и функция $K_1(y,t)$ (29) являются бесконечно-дифференцируемыми функциями по y,t из $[0,\gamma]$, а подынтегральная фнкция в $K_2(y,t)$ (30) при фиксированных y,t из $[0,\gamma]$ убывает к нулю быстрее экспоненты при $r \to \infty$.

6. Некоторые случаи решения задачи.

В качестве тестового варианта рассмотрим такой случай задачи, когда для сферического сегмента угол раскрыва θ_0 становится максимальным, равным γ, то есть $\theta_0 = \gamma$. В этом случае коэффициенты A_n,B_n,C_n для потенцциалов U_1, U_2, U_3 в (3), (4), (5) вычисляются явно :

$$A_n = \varepsilon_1 a_0^{\nu_n+1}[D_n - (a_0/a_1)^{\nu_n} M_n]/[1-(a_0/a_1)^{2\nu_n+1}],$$

$$B_n = \varepsilon_1 a_1^{-\nu_n}[M_n - D_n(a_0/a_1)^{\nu_n+1}]/[(a_0/a_1)^{2\nu_n+1} - 1],$$

$$C_n = \varepsilon_1 a_1^{\nu_n+1} M_n, \quad n \geq 1,$$

где D_n введены в (13), а

$$M_n = V_0 \int_0^\gamma P_{\nu_n}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.$$

Заметим, что здесь мы рассматриваем область пространства, представляющую замкнутую полость, ограниченную двумя сферическими поверхностями (радиусов $r = a_0, r = a_1$) и конусом. При этом на одной из сферических поверхностей имеются секции, которые можно считать сферическими лентами. Отметим, что полости и ленты различной геометрии представляют самостоятельный интерес [18].

Рассмотрим ещё один предельный вариант, когда сферический сегмент исчезает полностью, то есть $\theta_0 = 0$. Для этого варианта потенциалы U_2, U_3 равны нулю, так как их коэффициенты B_n,C_n равны нулю. Для потенциала U_1 в (3) коэффициенты A_n вычисляются явно и таковы:

$$A_n = \varepsilon_1 a_0^{\nu_n+1} \sum_{i=1}^{4} V_i \int_{\alpha_i}^{\alpha_i+1} P_{\nu_n}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta, \tag{31}$$

где

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_i = \theta_i,\, i = 1,2,3, \quad \alpha_4 = \gamma, \quad n \geq 1.$$

Отметим вариант, имеющий прикладное значение при конструировании приборов и устройств с заданным законом распределением электростатического поля в фиксированной области пространства, например, вблизи сферических закруглений узлов и приборов электронных систем. Такое распределение поля можно первоначально моделировать с помощью варьирования выбором трёх параметров задачи: а) выбором числа N секций закругления,
б) выбором значений потенциалов $V_i, i = 1,2,..,N$ для каждой секции,
в) выбором азимутальной ширины по θ каждой секции.

Список литературы

1. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем. // Журн. Тех. Физ. - 1938. - Т.8, **10-11**. - С. 1193-1206.

2. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. - М.:Изд-во АН СССР,1948. - 727с.

3. Уфлянд Я.С. О решении одного класса задач электростатики методом парных рядов.//Письма в Журн. Тех. Физ . - 1976. - Т.2, **17**. - С. 794-798.

4. Резуненко В.А. Интегральное уравнение задачи электростатики для сферического сегмента и диэлектрического закругления конусеа.// Вісн. ХНУ ім В.Н.Каразіна, Серія "Матем., прикладна матем. і механіка". - 2006. - Т. 749. - С. 50-56.

5. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках. - Харьков: Изд. ХГУ, - 1973. - 288 с.

6. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопалов В.П. Излучение волн сферой с отверстием. //Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 1977. -Т.17, **2**. - С. 394-406.

7. Дорошенко В.А., Кравченко В.Ф. Возбуждение незамкнутых конических и биконических структур.//Электромагнитные волны и электронные системы. - 2003. - Т.8,**6**. - С.4-78.

8. Сиренко Ю.К. Моделирование и анализ переходных процессов в открытых периодических, волноводных и компактных резонаторах. - Харьков: ЭДЕНА, - 2003. - 363 с.

9. Свищев Ю.В., Тучкин Ю.А. Векторная задача дифракции электромагнитных волн на двух сферических сегментах.// ДАН УССР, сер. А. - 1987. - Т. 12. - с. 56-60.

10. Резуненко В.А. Рассеяние плоской волны сферой с круговым отверстием. // Электромагнитные волны и электронные явления. - 2005. - Т. 10,**8**. С. 5-15.

11. Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т. Аналітико-числові методи в теорії дифракції хвиль на конічних і клиноподібних поверхнях. - Київ: Наукова Думка, - 2006. - 275 с.

12. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. - М.: -Мир, - 1987. - 312 с.

13. Гобсон Е.В. Теория сферических и сфероидальных функций. - М.: - ИЛ, - 1952. - 476 с.

14. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. -М.: Наука, - 1973. - 736 с.

15. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. -Киев: Наукова Думка, - 1977. - 362 с.

16. Садовничий В.А. Теория операторов.- М.: Высшая школа, - 1999. - 368 с.

17. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. - Киев: Наукова Думка, - 1986. - 543 с.

18. Singh B.M., Rokne J.G. and Dhaliwal R.S. Two-Dimensional Electrostatic Problem in a Plane With Earthed Elliptic Cavity due to One or Two Collinear Charged Electroststic Strips.//International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. Volume 2007, Article ID 60595, 9 pages.

Электростатичне поле сферичного сегменту та секційного заокруглення конуса

Р е з у н е н к о В. О.

Вилучена і обернена сингулярна частина оператора задачі електростатики для сферичного сегменту та секційного заокруглення конуса. Перетворення оператора задачі виконуються на допомогою контурного інтегрування та знаходження розв'язку інтегрального рівняння типу Абеля. Одержано ефективно розв'язуване інтегральне рівняння Фредгольма II роду з компактним оператором у гільбертовому просторі $L_2(0,\gamma)$. Розглянуті деякі узагальнення проблеми.

Бібліогр.: 18 найм.

Electrostatic field of a spherical segment and a sectional rounding of a cone

R e z u n e n k o V. A.

The singular part of the operator of the electrostatic problem for a spherical segment and sectional rounding of a cone was separated and inverted by the method of regularization. The method is based on the technics of contour integration and Abel integral transformation. The Fredholm integral equation of the second kind with a compact operator in Hilbert space $L_2(0,\gamma)$ was obtained. Some generalizations of problem are considered.

Электростатическое поле сферического сегмента и секционированного закругления конуса

Р е з у н е н к о В.А. Выделена и обращена сингулярная часть оператора задачи электростатики для сферического сегмента и секционированного проводящего закругления конуса. Преобразования оператора задачи выполняются с помощью техники контурного интегрирования и решения интегрального уравнения типа Абеля. Получено эффективно разрешимое интегральное уравнение Фредгольма II рода с компактным оператором в гильбертовом пространстве $L_2(0,\gamma)$, где γ-угол раскрыва конуса. Рассмотрены некоторые обобщения задачи.